Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4105 Matematikk 2**

Faglig kontakt under eksamen: Ulrik Skre Fjordholm[a], Harald Hanche-Olsen[b]

Tlf: [a] 7355 0284 , [b] 7359 3525

Eksamensdato: 13. august 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Godkjent kalkulator
Ingen andre hjelpemidler

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Finn buelengden til kurven med parameterframstilling

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \qquad \text{for } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Oppgave 2 Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + y^2 - e^{xz} - \sin y = 0$ i punktet $(1,0,0)$, og bruk denne til å finne en tilnærmet verdi for x i det punktet på flaten som ligger i nærheten av $(1,0,0)$ med $y = z = 1/10$.

Oppgave 3 Funksjonen f er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$.

a) Finn alle kritiske punkter for f, og bestem om disse er lokale maksima, minima eller sadelpunkter.

b) Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

Oppgave 4 Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D (2x + y^2)\, dA$$

når D er alle punkter i første kvadrant som ligger inni sirkelskiven $x^2 + y^2 \leqslant 4$, men utenfor kvadratet $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Hint: Du kan få bruk for identiteten $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$.

Oppgave 5 Beregn arealet til flaten S gitt ved $z = 1 - x^2 + y^2$, for $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Oppgave 6

a) Finn volumet av legemet T som er avgrenset nedentil av flaten $z = x^2 + 3y^2$ og oventil av flaten $z = 4 - (3x^2 + y^2)$.

Hint: Projeksjonen av T ned på xy-planet er en sirkelskive.

b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}.$$

Regn ut divergensen til $\mathbf{F}$, og beregn fluksintegralene

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \quad \text{og} \quad \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der S_1 er den øvre og S_2 den nedre overflaten til T,
og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ i begge tilfeller peker ut av legemet.

c) Vektorfeltet $\mathbf{G}$ er gitt ved

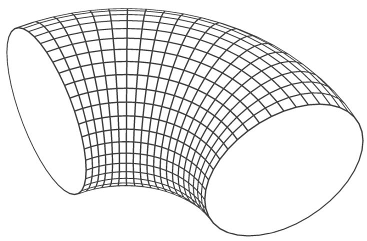
$$\mathbf{G} = \frac{1}{3}(x + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + 2z)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

Regn ut $\operatorname{curl}\mathbf{G}$, og finn verdien av

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er skjæringskurven mellom de to flatene som avgrenser T. Velg selv orientering, men angi hvilken du bruker.

Oppgave 7



a) Legemet T har form som en kvart smultring, og kan beskrives i sylinderkoordinater ved ulikhetene $(r-2)^2 + z^2 \leqslant 1$ og $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Finn volumet av T.

b) Finn verdien av flateintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$, der S er den krumme delen av overflaten til T, vektorfeltet $\mathbf{F}$ har formen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xf(x, y, z)\mathbf{i} + (y + 1)\mathbf{j} + g(x, y, z)\mathbf{k},$$

og det er kjent at funksjonene f og g oppfyller ligningen

$$f + x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} = 1.$$

Formelliste

Annenderiverttesten er basert på

$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$

Koordinatsystemer

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$

$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\;d\theta$

Kulekoordinater (R, ϕ, θ)

$x = R\sin\phi\cos\theta, \quad y = R\sin\phi\sin\theta, \quad z = R\cos\phi$

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$

Variabelskifte

$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv$ og tilsvarende i tre dimensjoner

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv \qquad \text{eller} \qquad dS = \frac{|\nabla G|}{|\partial G/\partial z|}\,dx\,dy$$

Vektoranalyse

Greens teorem: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$