TMA4105 Matematikk 2 – 2015-05-19

Løsning

Dette er versjon 1.0.

Oppgave 1

Vi deriverer, og setter inn $t = 1$ for det gitte punktet på kurven:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}.$$

Det gir

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + t^4 + 2t^2} = 1 + t^2, \quad |\mathbf{r}'(1)| = 2.$$

Enhetstangenten for $t = 1$ blir

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'(1)}{|\mathbf{r}'(1)|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}}{2},$$

og buelengden av hele kurven blir

$$\int_0^2 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^2 (1 + t^2)\,dt = 2 + \frac{2^3}{3} = \frac{14}{3}.$$

Oppgave 2

Vi deriverer den gitte ligningen med hensyn på x, med resultat

$$2xy^5 + 5x^2y^4y' - 6yy' + 8x^3 = 0, \quad \text{det vil si} \quad (5x^2y^4 - 6y)y' + 2xy^5 + 8x^3 = 0.$$

Her setter vi så inn $x = 1$ og $y = 1$, og får $-y' + 10 = 0$, altså $y'(1) = 10$.

Denne prosedyren førte frem fordi koeffisienten foran y' ble forskjellig fra null. Implisitt funksjonsteoremet forteller at da kan y skrives som en funksjon av x i nærheten av det gitte punktet. (Teoremet forutsetter at ligningen vi startet med har kontinuerlige partiellderiverte av første orden med hensyn på x og y, som også er tilfelle her.)

Oppgave 3

Vi partiellderiverer og forenkler:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x\frac{2 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\frac{x^2 + y^2 - 2}{1 + x^2 + y^2}$$

Vi ser at $\partial f/\partial x = 0$ bare for $x = 0$, og da blir $\partial f/\partial y = 0$ for $y = 0$ og $y = \pm\sqrt{2}$. Det eneste kritiske punktet for f innenfor D er $(x, y) = (0, 0)$, med tilhørende funksjonsverdi $f(0, 0) = 5$.

Vi må også søke ekstremverdier for f på randkurven $x^2 + y^2 = 1$.

Det enkleste er å sette inn $y^2 = 1 - x^2$, og få at $f(x, y) = 6 - 4x^2 - 3\ln 2$ når $x^2 + y^2 = 1$. Ekstremverdiene for $-1 \leqslant x \leqslant 1$ er i $x = 0$ og $x = \pm 1$, som gir løsningene $(x, y) = (\pm 1, 0)$ og $(x, y) = (0, \pm 1)$, med tilhørende funksjonsverdier $f(\pm 1, 0) = 2 - 3\ln 2 \approx -0{,}08$ og $f(0, \pm 1) = 6 - 3\ln 2 \approx 3{,}92$.

Funksjonen har maksimumsverdi $f(0, 0) = 5$ og minimumsverdi $f(\pm 1, 0) = 2 - 3\ln 2$.

Alternativt kan man bruke Lagranges metode. Regningen blir litt enklere om vi benytter at $f(x, y) = 5 - 3x^2 + y^2 - 3\ln 2$ når $x^2 + y^2 = 1$. Alle ekstrempunkter til denne funksjonen på randkurven er kritiske punkter til Lagrangefunksjonen L gitt ved

$$L(x, y, \lambda) = 5 - 3x^2 + y^2 - 3\ln 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vi finner

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -6x + 2\lambda x = 2x(\lambda - 3), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 2y(\lambda + 1), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1,$$

så kritiske punkter for L er gitt ved $2x(\lambda - 3) = 0$, $2y(\lambda + 1) = 0$ og $x^2 + y^2 = 1$. Siden $\lambda - 3$ og $\lambda + 1$ ikke kan være null samtidig, må enten $x = 0$ eller $y = 0$. Løsningen avsluttes på samme måte som før.

Oppgave 4

T kan beskrives ved ulikhetene $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant 4 - x^2$ – de andre områdene som de gitte flatene deler rommet i, er ubegrensede. Integralet blir

$$\begin{aligned}
\iiint_T (1 + y - 2z)\, dV &= \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} \int_0^y (1 + y - 2z)\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} (y + y^2 - y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} (8 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4)\, dx \\
&= 2(8 \cdot 2 - \tfrac{4}{3} \cdot 2^3 + \tfrac{1}{10} \cdot 2^5) = 32 \cdot (1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}) \\
&= \frac{256}{15}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi kan lukke til flaten $\mathcal{S}$ ved å legge til $\mathcal{S}_0$ gitt ved $z = 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Tilsammen danner de to flatene overflaten til halvkulen T gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

På $\mathcal{S}_0$ er utadrettet normalvektor $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$, og der er da $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -z = 0$. Divergensteoremet gir

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

Divergensen til $\mathbf{F}$ er $\operatorname{div} \mathbf{F} = 10x + 6y + 1$. Fordi T er symmetrisk både om yz-planet og xz-planet blir integralet over T av henholdsvis x og y lik null, så vi ender med

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T 1\, dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{16}{3}\pi$$

ved å bruke formelen for volumet av en (halv-)kule.

Man kan også regne ut trippelintegralet nokså enkelt med kulekoordinater.

Oppgave 6

a. En potensialfunksjon φ må tilfredsstille

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= 1 + y^2 && \Rightarrow \varphi = x + xy^2 + f(y, z), \\
\varphi_y &= 2xy + z^2 && \Rightarrow \varphi = xy^2 + yz^2 + g(z, y), \\
\varphi_z &= 2yz && \Rightarrow \varphi = yz^2 + h(x, y)
\end{aligned}$$

der funksjonene f, g og h er «integrasjonskonstantene» man får ved å integrere ligningene på venstresiden med hensyn på x, y og z.

Vi ser at $\varphi(x, y, z) = x + xy^2 + yz^2$ passer i ligningene, så vi har funnet en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$. Dermed er også $\mathbf{F}$ konservativt.

Det er altså ikke nødvendig å sjekke at $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ først, selv om det er et naturlig første trinn dersom man er usikker på om feltet er konservativt.

b. Vi kan evaluere integralet ved å sette inn potensialfunksjonen i endepunktene:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(\tfrac{1}{2})) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi((\tfrac{1}{2}, 1, 0)) - \varphi((0,0,1)) = 1.$$

Oppgave 7

a. T kan beskrives ved ulikhetene

$$x^2 + y^2 - 2x + y \leqslant z \leqslant -2x + y + 4,$$

og projeksjonen (la oss kalle den D) i xy-planet er da gitt ved $x^2 + y^2 - 2x + y \leqslant -2x + y + 4$, altså $x^2 + y^2 \leqslant 4$, som beskriver en sirkelskive med radius 2 og sentrum i origo. Vi finner for volumet av T:

$$\begin{aligned}
\operatorname{volum} T &= \iint_D \Big((-2x + y + 4) - (x^2 + y^2 - 2x + y)\Big)\, dS \\
&= \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi(2 \cdot 2^2 - \tfrac{1}{4} \cdot 2^4) = 8\pi.
\end{aligned}$$

b. Om vi bruker kortformen $\partial_x(u)$ for $\partial u/\partial x$, er

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl} \mathbf{F} &= \Big(\partial_y(xy) - \partial_z(z + 2x - y + 4)\Big)\mathbf{i} + \Big(\partial_z(x) - \partial_x(xy)\Big)\mathbf{j} + \Big(\partial_x(z + 2x - y + 4) - \partial_y(x)\Big)\mathbf{k} \\
&= (x - 1)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Ved Stokes' teorem er $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$ for en hvilken som helst flate $\mathcal{S}$ som har C som randkurve. Det virker enklest å bruke den delen av planet $G(x, y, z) = z + 2x - y = 4$ som ligger over sirkelen D i xy-planet. Det gir

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \cdot \frac{|\nabla G|}{|\partial G/\partial z|}\, dx\, dy = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy,$$

slik at

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, 4 - 2x + y) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\
&= \iint_D \Big((x - 1)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\Big) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\
&= \iint_D (2x + y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r\cos\theta + r\sin\theta) \cdot r\, dr\, d\theta = 0,
\end{aligned}$$

der vi slipper lett unna på slutten fordi $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$ og $\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0$. (Vi kunne også benyttet antisymmetrien til integranden når vi erstatter (x, y) med $(-x, -y)$ og sluppet enda lettere unna.)

I utregningen valgte vi $\hat{\mathbf{N}}$ med positiv $\mathbf{k}$-komponent for at det skulle stemme med den gitte orienteringen av C.

Alternativt kunne vi regnet ut integralet direkte: På kurven C er $z = -2x + y + 4$, slik at $dz = -2\,dx + dy$. Derfor er

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C x\, dx + 8\, dy + xy\, dz \\
&= \int_C (x - 2xy)\, dx + (xy + 8)\, dy
\end{aligned}$$

Nå kan vi parametrisere med $x = 2\cos\theta$ og $y = 2\sin\theta$ for $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, og få

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\int_0^{2\pi}\Big(-(\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta + (\cos\theta\sin\theta + 8)\cos\theta\Big)\,d\theta$$
$$= 2\Big[-\sin\theta + \tfrac{2}{3}\sin^3\theta - \tfrac{2}{3}\cos^3\theta - 8\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$$

Oppgave 8

Variablene $u = y^2 - x^2$ og $v = x/y$ peker seg naturlig ut ($v = y/x$ er mindre heldig fordi x både er null og skifter fortegn i området). Området D beskrives i (u,v) ved $1 \leqslant u \leqslant 4$ og $-\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$. Dette er et rektangel R i uv-planet.

Integranden blir $1 - v^2$.

Vi finner Jakobideterminanten

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2x & 2y \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = 2\frac{x^2}{y^2} - 2 = 2(v^2 - 1),$$

og derfor

$$du\,dv = |2(v^2-1)|\,dx\,dy = 2(1-v^2)\,dA.$$

Til slutt er

$$\iint_D \frac{y^2 - x^2}{y^2}\,dA = \iint_R (1-v^2)\frac{du\,dv}{2(1-v^2)} = \iint_R \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\,\text{areal}(R) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$