NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4105 Matematikk 2**

Faglig kontakt under eksamen: Marius Thaule[a], Ulrik Skre Fjordholm[b]

Tlf: [a]7359 3530 , [b]7355 0284

Eksamensdato: 19. mai 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Godkjent kalkulator
Ingen andre hjelpemidler

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La C være en kurve gitt av parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Finn enhetstangentvektoren til C i punktet $(1, 1/3, \sqrt{2}/2)$. Beregn buelengden til C.

Oppgave 2 Uttrykket $x^2y^5 - 3y^2 + 2x^4 = 0$ definerer $y = y(x)$ implisitt som en funksjon av x. Finn dy/dx i punktet $x = 1,\ y = 1$. Begrunn kort hvorfor y kan skrives som en funksjon av x i nærheten av dette punktet.

Oppgave 3 Finn største og minste verdi av funksjonen

$$f(x, y) = 5 - 3x^2 + y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2)$$

i området D gitt ved $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Oppgave 4 Beregn integralet

$$\iiint\limits_T (1 + y - 2z)\, dV$$

der T er legemet begrenset av xy-planet, den parabolske sylinderflaten $y = 4 - x^2$ og planet $z = y$.

Oppgave 5 Beregn fluksintegralet

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^2 + ye^y)\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 6

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

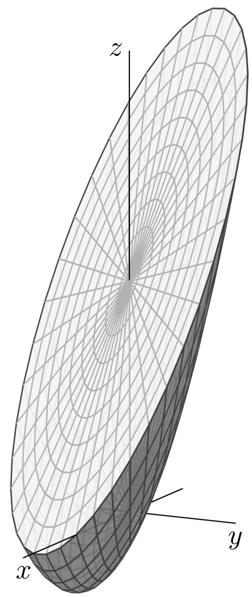
$$\mathbf{F} = (1 + y^2)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

er konservativt, og finn en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$.

b) Beregn $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der kurven C er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + \cos(\pi t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Oppgave 7



a) Finn volumet av legemet T som er avgrenset nedentil av flaten $z = x^2 + y^2 - 2x + y$ og oventil av planet $z + 2x - y = 4$.

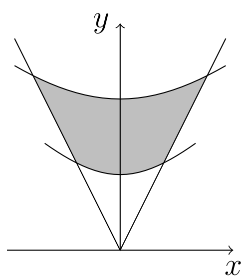
Hint: Projeksjonen av T ned på xy-planet er en sirkelskive.

b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (z + 2x - y + 4)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

Regn ut $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, og finn verdien av $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der C er skjæringskurven mellom de to flatene som avgrenser T, orientert mot klokken sett ovenfra.

Oppgave 8



Området D er avgrenset av kurvene gitt ved $y^2 - x^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 4$, $x = -y/2$ og $x = y/2$ for $y > 0$ (se figur). Finn en variabelsubstitusjon som transformerer D til et rektangel, og bruk denne til å beregne

$$\iint\limits_D \frac{y^2 - x^2}{y^2}\, dA.$$

Hint: Regningen blir kanskje enklere om du uttrykker $du\,dv$ ved $dx\,dy$ enn om du gjør det omvendt.

Formelliste

Annenderiverttesten er basert på

$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$

Koordinatsystemer

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$

$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\;d\theta$

Kulekoordinater (R, ϕ, θ)

$x = R\sin\phi\cos\theta, \quad y = R\sin\phi\sin\theta, \quad z = R\cos\phi$

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv \text{ og tilsvarende i tre dimensjoner}$$

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv \quad \text{eller} \quad dS = \frac{|\nabla G|}{|\partial G/\partial z|}\,dx\,dy$$

Vektoranalyse

Greens teorem: $$\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet: $$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem: $$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$