NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4105 Matematikk 2**

Faglig kontakt under eksamen: Ulrik Skre Fjordholm[a], Anne Kværnø[b]

Tlf: [a] 7355 0284 , [b] 7359 3542

Eksamensdato: 7. august 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Godkjent kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^3$.

a) Finn den retningsderiverte til f i punktet $(x, y) = (2, -1)$ i retning $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

b) Finn et uttrykk for tangentplanet til grafen til f i punktet der $(x, y) = (1, 0)$.

Oppgave 2 En deriverbar funksjon y er implisitt definert ved ligningen

$$2x^3 + y^3 = 5xy.$$

Finn $y'(x)$ for $x = 1$, når det er gitt at $y(1) = 2$.

Oppgave 3 Finn største og minste verdi til $f(x, y) = 4x^3 + 2y^3 + 3x^2y$ på sirkelskiven $x^2 + y^2 \leqslant 17$.

Oppgave 4

a) Skissér integrasjonsområdet i dobbeltintegralet $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \cos\Big(\frac{\pi}{4}(3x - x^3)\Big)\, dx\, dy.$

b) Bytt om integrasjonsrekkefølgen, og beregn verdien av integralet.

Oppgave 5 Regn ut fluksen av vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (2x + 2xy)\mathbf{i} + (y - xy - yz)\mathbf{j} + (2yz - 1)\mathbf{k}$$

opp gjennom den delen av planet $x + 2y + z = 2$ som ligger i første oktant (det vil si der $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ og $z \geqslant 0$).

Oppgave 6 Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$. Vi lar $\mathcal{S}$ være den krumme delen av overflaten til T.

a) Finn massen til halvkulen T når massetettheten er gitt ved $\rho(x, y, z) = 3z$.

b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\,\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\,\mathbf{j} + (xze^y + 1)\,\mathbf{k}.$$

Regn ut $\operatorname{div}\mathbf{F}$ og finn fluksen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv z-komponent.

Oppgave 7 Beregn $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, når vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = (-y - y^3 + 2xz)\mathbf{i} + (x^3 - ye^z)\mathbf{j} + \Big(xy^2(z-1)\Big)\mathbf{k},$$

og $\mathcal{C}$ er kurven $x^2 + y^2 = 1$ i xy-planet, orientert mot klokken sett ovenfra.

Oppgave 8 Regn ut volumet av legemet gitt ved ulikhetene

$$x^2 + 4y^2 \leqslant z \leqslant 1 - 3x^2.$$

Formelliste

Annenderiverttesten er basert på

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\;d\theta$$

Kulekoordinater (R, ϕ, θ)

$$x = R\sin\phi\cos\theta, \quad y = R\sin\phi\sin\theta, \quad z = R\cos\phi$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv \text{ og tilsvarende i tre dimensjoner}$$

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm, \quad dm = \rho(x,y,z)\,dV$$

Vektoranalyse

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$