Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Mats Ehrnstöm telefon 73 59 17 44 / 73 59 35 20
Marius Thaule telefon 73 59 35 30 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2

Nynorsk
Laurdag 9. juni 2012
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 30. juni 2012.

Alle svar skal grunngjevast og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 Ei flate er gitt ved likninga

$$z = \sin(xy) + \cos(xy).$$

Finn likninga for tangentplanet i punktet $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ på flata.

Oppgåve 2 Finn største og minste verdi til funksjonen

$$f(x, y) = 4 - x^2 + 2x - y^2$$

på ellipsen $x^2 + 3y^2 = 1$.

Oppgåve 3 Ei plan kurve kjent som Eulers spiral er parametrisert ved

$$x(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u, \quad y(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,\mathrm{d}u, \quad t \geq 0.$$

La $s(t)$ vere bogelengda frå origo, og la $\kappa(t)$ vere krumminga i punktet $(x(t), y(t))$. Ein eigenskap ved Eulers spiral er at krumminga i eit punkt på kurva er proporsjonal med bogelengda frå origo til punktet. Vis dette ved å berekne $s(t)$ og $\kappa(t)$ for alle $t \geq 0$.

Oppgåve 4 Berekn trippelintegralet

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$$

der lekamen T er gitt ved $0 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge 0$.

Oppgåve 5

a) Likninga $4x^2+24x+9y^2=0$ beskriv ein ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengda til den store og litle halvaksen, og skissér ellipsen.

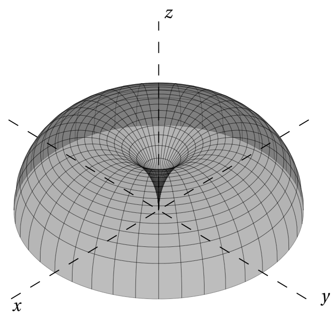
b) Den rette linja $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x$ deler ellipsen frå **a)** i to delar. La C vere den kortaste av desse to delane, orientert frå høgre mot venstre. Finn

$$\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$

(Hint: Parametriseringa $x=3\cos t-3,\ y=2\sin t$ kan brukast.)

c) Rekn ut arealet avgrensa av C og linja $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x$.

(Hint: Greens teorem kan brukast.)



Flata S

Oppgåve 6 Flata S er gitt i sylinderkoordinatar ved

$$z=\sqrt{1-(r-1)^2}, \quad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

a) Vis at flatedifferensialet (flateelementet) $\mathrm{d}\sigma$ til S er gitt ved $\mathrm{d}\sigma = \frac{r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, og berekn arealet til S.
(Hint: Substitusjonen $r-1=\sin t$ kan vere nyttig.)

b) Lekamen T er avgrensa av flata S og xy-planet. Berekn volumet til T.

c) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Berekn fluksen $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$ til $\mathbf{F}$ gjennom flata S, der $\mathbf{n}$ er einingsnormalen som peikar ut av lekamen T.

Formelliste følgjer vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Andrederiverttesten er basert på:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystem:

Sylinderkoordinatar (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinatar (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tyngdepunkt og tregleiksmoment for romlege lekamar:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$