



Faglig kontakt under eksamen:

Lisa Lorentzen Telefon 73 59 35 48 / 73 59 35 20

Marius Thaulé Telefon 73 59 35 30 / 73 59 35 20

Kontinuasjoneksamen i TMA4105 Matematikk 2

Bokmål

Mandag 6. august 2012

Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 27. august 2012.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Vektorfeltet \mathbf{F} er definert for alle (x, y, z) i rommet ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} + z(x^2 - 4yz^2)\mathbf{j} + y(x^2 - 6yz^2)\mathbf{k}.$$

a) Vis at \mathbf{F} er et konservativt vektorfelt.

b) Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven i rommet gitt ved $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 2 Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y, z) = z$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$.

Oppgave 3 La R være området i xy -planet som er avgrenset av de to kurvene

$$3x^2 - y^2 = 3 \quad \text{for } x \geq 1 \quad \text{og} \quad x + y^2 = 11.$$

Skissér de to kurvene og beregn integralet $\iint_R x \, dA$.

Oppgave 4 Finn massesenteret (tyngdepunktet) til legemet gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, når massetettheten er proporsjonal med kvadratet av avstanden fra origo.

Oppgave 5 Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

a) Vis at f er kontinuert i origo.

b) En kan vise at f ikke er kontinuert deriverbar i origo. Vis likevel at den retningsderiverte $(D_{\mathbf{u}}f)|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t}$ eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$.

Oppgave 6 Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

a) Finn volumet til T .

La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . La videre \mathbf{F} være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi} \mathbf{i} - \frac{x}{2\pi} \mathbf{j} + \frac{z}{4} \mathbf{k}.$$

b) Regn ut

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

c) Regn ut

$$\iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Annenderiverttesten er basert på:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater (r, θ, z) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ) :

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Flateintegral:

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv$$

Tyngdepunkt og treghetsmoment for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \, dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y \, dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z \, dm, \quad dm = \delta(x, y, z) \, dV$$

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \, dm, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \, dm, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \, dm,$$

$$I_L = \iiint_T R(x, y, z)^2 \, dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$

Divergensteoremet: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$

Stokes' teorem: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$