Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Hans Jakob Rivertz telefon 938 32 172/73 59 35 20
Dag Wessel-Berg telefon 924 48 828/73 59 35 20

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2

Nynorsk
Onsdag 8. juni 2011
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidlar (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Sensur: 29. juni 2011.

Alle svar skal grunngjevast og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 Finn senteroiden (lik tyngdepunktet, lik massesenteret) $(\bar{x}, \bar{y})$ til trekanten med hjørne i $(0,0)$, $(1,0)$, og $(0,2)$, der massetettheten er gitt ved $\delta(x, y) = y^2$.

Oppgåve 2 Vis at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^8}{y^4 + x^8}$$

ikkje eksisterer.

Oppgåve 3 Finn krumminga og einingsnormalvektoren til kurva $y = x^2$ i punktet $(x, y) = (1,1)$.

Oppgåve 4 La punktet (x, y) i xy-planet gi posisjonen på eit kart (der positiv y-akse peikar mot nord, og positiv x-akse peikar mot aust), og la funksjonen

$$f(x, y) = 100 - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}y^2$$

definere terrenget si høgd over havet.

a) Finn ei likning for tangentplanet til flata $z = f(x, y)$ i punktet $\left(-1, 1, 100 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Anta du står i dette punktet i terrenget. Med kva for vinkel hellar (eller skrånar) terrenget hvis du tek til å bevege deg i retning søraust?

Oppgåve 5 Finn den største og den minste avstanden frå origo til kurva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Oppgåve 6 Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xye^{x^2}\,\mathbf{i} + e^{x^2}\,\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

a) Avgjer om $\mathbf{F}$ er eit konservativt vektorfelt.

b) Finn verdien av lineintegralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$$

når C er romkurva med parameterframstilling $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$, der $0 \le t \le \pi$.

Oppgåve 7 La T vere lekamen avgrensa av flata $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$, og plana $z = 0$, og $z = \sqrt{5}$.

a) Finn volumet til T.

b) La vektorfeltet $\mathbf{F}$ vere gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + (z - x)\,\mathbf{k}.$$

Finn verdien av

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S)$$

der S er den krumme delen av overflata til T, og der $\mathbf{n}$ er einingsnormalen til S som peikar ut av T.

Formelliste følgjer vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \text{ der } A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinatar (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinatar (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{N}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S)$$

Tyngdepunkt og tregheitsmoment for romlege lekamar:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$