Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen telefon 73 59 35 48 / 73 59 35 20
Hans Jakob Rivertz telefon 938 32 172 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2

Bokmål
Lørdag 13. august 2011
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 3. september 2011.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn og klassifiser de kritiske punktene til

$$f(x,y) = 6xy + 4x^3 + 3xy^2.$$

Oppgave 2 Finn den retningsderiverte til funksjonen

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2),$$

i punktet $(1,2,-2)$ og retning $3\mathbf{i}-\mathbf{k}$.

Oppgave 3 La kurven C være gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}, \quad t>0.$$

a) Finn hastigheten $\mathbf{v}$ og akselerasjonen $\mathbf{a}$ til en partikkel som har posisjonen bestemt ved $\mathbf{r}(t)$ der t er tiden. Vis at farten (lik banehastigheten) er gitt ved

$$v(t) = \frac{1+t^2}{t}, \quad t>0.$$

b) Hva er kurvens krumning κ? Finn også kurvens torsjon τ.

Oppgave 4 La $f(x,y,z)$ og $g(x,y)$ være to deriverbare funksjoner. Hvilket av uttrykkene nedenfor er et uttrykk for $\frac{\partial w}{\partial x}$ når $w(x,y) = f(x,y,z)$, der $z = g(x,y)$ (uansett hvilke egenskaper funksjonene ellers måtte ha)?

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (iv) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$ (v) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial x}$

(Husk at svaret skal begrunnes.)

Oppgave 5 La C være kurven beskrevet ved

$$r^2 = \sin 2\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

i polarkoordinater. Lag en skissé av C og bestem arealet innenfor C.

Oppgave 6 Regn ut integralet

$$\iint_R (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,\mathrm{d}A,$$

der R er parallellogrammet med hjørner i $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ og $(0,\pi)$.

Oppgave 7 Bruk Greens teorem til å beregne

$$\oint_C y^2\,\mathrm{d}x + (2xy + x)\,\mathrm{d}y,$$

der C er randen til firkanten med hjørner i $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$ og $(2,0)$.

Oppgave 8 La S være flaten gitt ved

$$x^2 + y^2 \le 1, \quad z = \frac{1}{e},$$

og la $\mathbf{F}$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{y+z} - 2y)\,\mathbf{i} + (xe^{y+z} + y)\,\mathbf{j} + e^{x+y}\,\mathbf{k}.$$

a) Vis at

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi, \qquad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S)$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

b) La S' være flaten gitt ved

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad z \ge \frac{1}{e}.$$

Regn ut $\iint_{S'} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}'\,\mathrm{d}\sigma$ der $\mathbf{n}'$ er enhetsnormalen til S' med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

(Hint: Stokes' teorem.)

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \text{ der } A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{N}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S)$$

Tyngdepunkt og treghetsmoment for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$