Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73593548
Sigmund Selberg tlf. 40043660

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 20. mai 2009
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Godkjent enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 10. juni 2009

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$.

a) Finn de kritiske punktene til f.

b) Finn maksimum av $f(x,y)$ på området R gitt ved $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$, $0 \le y \le 2$.

Oppgave 2 Begrunn at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2 + ze^{yz}\right)\mathbf{j} + ye^{yz}\mathbf{k}$$

er konservativt, og finn arbeidet som gjøres av $\mathbf{F}$ når en partikkel flyttes fra $(0,0,0)$ til $(1,3,2)$ langs en hvilken som helst glatt kurve.

Oppgave 3 Finn minimum av $f(x,y,z) = 3x + y + 2z$ på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Oppgave 4 La D betegne den delen av kulen $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ som ligger utenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Anta at D har massetetthet

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sett opp massen til D som et trippelintegral i kulekoordinater, og regn ut dette integralet.

Oppgave 5 La S være den delen av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger over planet $2x + z = 1$. Vi orienterer S ved å velge enhetsnormalen $\mathbf{n}$ slik at den peker oppover (med andre ord: $\mathbf{n}$ skal ha positiv z-komponent). Finn fluksen gjennom S av vektorfeltet $\mathbf{F} = \mathbf{k}$, dvs. regn ut integralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Oppgave 6 La $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

a) Regn ut $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

b) La C være den lukkede kurven som består av de tre rette linjestykkene PQ, QR og RP, der $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ og $R = (0, 0, 2)$. Finn sirkulasjonen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

av $\mathbf{F}$ rundt C med omløpsretning PQR.

Oppgave 7

a) Regn ut $\mathbf{T}$ (enhetstangent), $\mathbf{N}$ (enhetsnormal) og κ (krumning) for den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{j}, \quad t \geq 0.$$

b) En partikkel beveger seg med konstant fart $v = 2$ m/s langs kurven

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad x \geq 0,$$

der x og y måles i meter. Anta at partikkelen er i origo ved tiden $t = 0$. Finn akselerasjonsvektoren til partikkelen ved tiden $t = 7/3$ (sekunder).

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\,\theta,\,z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\,\varphi,\,\theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\,dv$$

For graf $z = f(x,y)$: $\quad d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_T z\,dm \quad (dm = \delta\,dV)$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$