

1 For å finne de kritiske punktene løser vi ligningen  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6x, 3y^2 - 3) = (0, 0),$$

det vil si,

$$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \tag{1}$$

$$y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1) = 0. \tag{2}$$

Fra (1) har vi  $x = 0$  og  $x = 2$ , og fra (2) har vi  $y = \pm 1$ . Altså har  $f$  fire kritiske punkter:

$$(0, -1), \quad (0, 1), \quad (2, -1) \quad \text{og} \quad (2, 1).$$

For å klassifisere disse bruker vi annenderiverttesten.

I vårt tilfelle er

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6, \quad f_{yy}(x, y) = 6y \quad \text{og} \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

slik at

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 36(x - 1)y.$$

Siden

- $\Delta(0, -1) > 0$  og  $f_{xx}(0, -1) < 0$  må  $(0, -1)$  være et lokalt maksimumspunkt
- $\Delta(0, 1) < 0$  må  $(0, 1)$  være et sadelpunkt
- $\Delta(2, -1) < 0$  må  $(2, -1)$  være et sadelpunkt
- $\Delta(2, 1) > 0$  og  $f_{xx}(2, 1) > 0$  må  $(2, 1)$  være et lokalt minimumspunkt

ved annenderiverttesten.

2 Vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$  er konservativt:

$$\varphi(x, y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3$$

er en potensialfunksjon til  $\mathbf{F}$  siden  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ .

Altså er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0, 4) - \varphi(2, 0) = \frac{4^3}{3} - 0 = \frac{64}{3}.$$

3 La  $f(x, y, z) = 3x^2 - 9y^2 + z^2$  slik at  $S$  er nivåflaten  $f(x, y, z) = 10$ . Vi har

$$\nabla f(x, y, z) = (6x, -18y, 2z).$$

Siden gradienten alltid er normal til nivåflatene har tangentplanet i punktet  $(a, b, c)$  normalvektoren

$$\nabla f(a, b, c) = (6a, -18b, 2c).$$

For at tangentplanet skal være parallelt med planet  $-6x + 18y + 8z = 7$  må de to normalvektorene være parallelle:

$$(6a, -18b, 2c) = \lambda(-6, 18, 8), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

som gir  $\lambda = -a$ . Det gir igjen at

$$-18b = -18a \quad \text{og} \quad 2c = -8a,$$

det vil si,  $a = b = -c/4$ . Innsatt i ligningen for  $\mathcal{S}$  får vi

$$f(a, a, -4a) = 3a^2 - 9a^2 + 16a^2 = 10a^2 = 10$$

slik at  $a = \pm 1$ . Altså svarer punktene

$$(1, 1, -4) \quad \text{og} \quad (-1, -1, 4)$$

til punktene på  $\mathcal{S}$  der tangentplanet er parallelt med planet  $-6x + 18y + 8z = 7$ .

4 I vårt tilfelle er

$$\nabla T(x, y) = (e^x \cos(y) - e^y \sin(x), e^y \cos(x) - e^x \sin(y))$$

slik at

$$\nabla T(0, 0) = (1 - 0, 1 - 0) = (1, 1)$$

Funksjonen  $T(x, y)$  er deriverbar slik at

$$D_{\mathbf{u}}T(x, y) = \nabla T(x, y) \cdot \mathbf{u} = |\nabla T(x, y)| \cos(\theta)$$

der  $\theta$  er vinkelen mellom  $\nabla T(x, y)$  og retningen  $\mathbf{u}$ .

For at den retningsderiverte til  $T$  i  $(0, 0)$  skal bli størst mulig må  $\theta = 0$ , det vil si,

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla T(0, 0)}{|\nabla T(0, 0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),$$

og for at den retningsderiverte til  $T$  i  $(0, 0)$  skal bli minst mulig må  $\theta = \pi$ , det vil si,

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla T(0, 0)}{|\nabla T(0, 0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

5 Funksjonen  $f(x, y)$  er ikke kontinuerlig i  $(0, 0)$ : la  $y = kx$ ,  $k \neq 0$ , slik at

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{x^2(kx)^2}{x^4 + (kx)^4} = \frac{k^2x^4}{(1+k^4)x^4} \rightarrow \frac{k^2}{1+k^4}$$

når  $x \rightarrow 0$ . Altså eksisterer ikke

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

og  $f$  kan derfor ikke være kontinuerlig i  $(0, 0)$ .

Fra definisjonen av partiellderivasjon får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

6 Fra oppgaveteksten har vi at  $\mathcal{S}$  er flaten gitt ved

$$z = 3 - x - \frac{1}{2}y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}$$

der  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 6 - 2x, 0 \leq x \leq 3\}$ . Dermed er

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \iint_R (x + y^2, -2x, 2yz) \cdot \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \, dA = \iint_R (x + y^2 - x + 2yz) \, dA \\ &= \iint_R (y^2 + y(6 - 2x - y)) \, dA = 2 \iint_R (3y - xy) \, dA \\ &= 2 \int_0^3 \int_0^{6-2x} (3y - xy) \, dy \, dx = 2 \int_0^3 \left[ \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^{6-2x} \, dx \\ &= \int_0^3 (3(6 - 2x)^2 - x(6 - 2x)^2) \, dx = \int_0^3 (3 - x)(6 - 2x)^2 \, dx \\ &= 4 \int_0^3 (3 - x)^3 \, dx = 81. \end{aligned}$$

7 Vi kan beskrive legemet  $T$  ved hjelp av kulekoordinater:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Massen til  $T$  er så gitt ved

$$\begin{aligned} m &= \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x, y, z) \, dV = \iiint_T e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \int_0^{\pi/4} \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[ \frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (e - 1). \end{aligned}$$

8 Fra oppgaveteksten har vi  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, x, y)$  slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (1, 2, 1).$$

La  $S$  være flaten som ligger i planet  $z = y$  med rand lik  $C$ . Stokes' teorem gir så

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_S (1, 2, 1) \cdot (0, -1, 1) \, dS = - \iint_S dS.$$

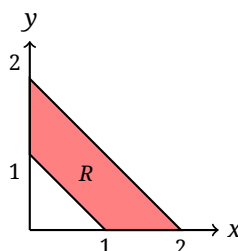
Fra  $z = x^2 + y^2$  og  $z = y$  får vi at  $x^2 + y^2 = y$ , det vil si,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Altså er projeksjonen av  $S$  i  $xy$ -planet gitt ved  $x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4$  slik at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S dS = - \iint_{x^2 + (y-1/2)^2 \leq 1/4} dA = -\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{\pi}{4}.$$

9 En skisse av området  $R$  er gitt i figuren under.



For å regne ut

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$$

benytter vi koordinattransformasjonen:

$$u = y - x, \quad v = y + x.$$

Siden

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

og  $R$  kan uttrykkes som området

$$-v \leq u \leq v, \quad 1 \leq v \leq 2,$$

får vi

$$\begin{aligned} \iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA &= \int_1^2 \int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_1^2 \left[ v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \right]_{u=-v}^v \left| \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \right| dv \\ &= \int_1^2 v \sin(1) dv = \frac{3}{2} \sin(1). \end{aligned}$$

**10** Kurven  $C$  kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

som gir

$$\mathbf{r}'(t) = 3(-\cos^2(t) \sin(t), \sin^2(t) \cos(t)).$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3(t), \cos^3(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) \sin^4(t) + \cos^4(t) \sin^2(t)) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) (\sin^4(t) + \cos^2(t) \sin^2(t)) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) (\sin^4(t) + (1 - \sin^2(t)) \sin^2(t)) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt \\ &= \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

der den siste likheten følger fra

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

Greens teorem gir at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_R dA = 2 \text{ areal}(R).$$

Altså er

$$\text{areal}(R) = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{8}.$$