NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

9. mai 2025

1 La $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ slik at

$$\nabla f(x,y) = \big(2x - y + 1, 2y - x + 1\big) = (0,0)$$

gir ligningene

$$2x - y + 1 = 0 \tag{1}$$
$$2y - x + 1 = 0. \tag{2}$$

Fra (1) får vi $y = 2x + 1$ som innsatt i (2) gir $2(2x+1) - x + 1 = 3x + 3 = 0$, det vil si, $x = -1$ som igjen gir $y = 2x + 1 = -1$.

Altså har f et kritisk punkt i $(x,y) = (-1,-1)$, hvor $f(-1,-1) = -1$.

Vi må så undersøke hvilke verdier f tar i området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0, y \leqslant 0 \text{ og } x + y \geqslant -3\}$. Det eneste kritiske punktet til f ligger i D, så det som gjenstår å sjekke er hvilke verdier f oppnår langs randen til D.

Vi undersøker verdiene f oppnår langs $x = 0$, $-3 \leqslant y \leqslant 0$. La $g(y) = f(0,y)$, det vil si,

$$g(y) = f(0,y) = y^2 + y = y(y+1)$$

slik at $g'(y) = 2y + 1 < 0$ for $-3 < y < -1/2$, $g'(-1/2) = 0$ og $g'(y) > 0$ for $-1/2 < y < 0$. Altså er

$$-\frac{1}{4} = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) \leqslant f(0,y) \leqslant f(0,-3) = 6$$

for alle $-3 \leqslant y \leqslant 0$.

Helt tilsvarende får vi

$$-\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \leqslant f(x,0) = x^2 + x = x(x+1) \leqslant f(-3,0) = 6$$

for alle $-3 \leqslant x \leqslant 0$.

Til slutt undersøker vi verdiene f oppnår langs $-3 \leqslant x \leqslant 0$, $y = -x - 3$. La $h(x) = f(x, -x-3)$, det vil si,

$$h(x) = f(x,-x-3) = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x(-x-3) = 3x^2 + 9x + 6 = 3(x+2)(x+1).$$

Fra $h'(x) = 6x + 9 < 0$ for $-3 < x < -3/2$, $h'(-3/2) = 0$ og $h'(x) > 0$ for $-3/2 < x < 0$ får vi

$$-\frac{3}{4} \leqslant h\left(-\frac{3}{2}\right) \leqslant h(x) \leqslant h(-3) = h(0) = 6$$

for alle $-3 \leqslant x \leqslant 0$.

Den minste verdien til f i D er derfor -1, mens den største verdien til f i D er 6.

2 Ved å la $f(x) = x^2$ får vi at

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2xyz, x^2 z, y f(x)\big) = \big(2xyz, x^2 z, x^2 y\big) = \nabla\varphi(x,y,z)$$

der $\varphi(x,y,z) = x^2 yz$.

Siden $\mathbf{r}(0) = (0,0,0)$ og $\mathbf{r}(\pi/2) = (1,1,1)$, og $\mathbf{F}$ er konservativt med potensialfunksjon φ, får vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) = 1.$$

3 Grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x) - y}{x}$$

eksisterer *ikke*. La $f(x,y) = \big(\sin(x) - y\big)/x$. Dersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

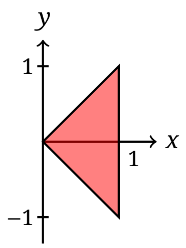
skulle eksistert måtte grensen

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - kx}{x}$$

gitt samme verdi uavhengig av verdien til k noe som ikke stemmer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - kx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - O(x^3) - kx}{x} = 1 - k.$$

4 En skisse av integrasjonsområdet er gitt i figuren under.



Vi kan uttrykke integrasjonsområdet som

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad -x \leqslant y \leqslant x$$

slik at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1} (x+y)^2 \,dx\,dy &= \int_0^1\int_{-x}^{x} (x+y)^2 \,dy\,dx = \int_0^1\int_{-x}^{x} \big(x^2 + 2xy + y^2\big)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \Big[x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3\Big]_{y=-x}^{x} dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

5 La R være området i xy-planet avgrenset av C, det vil si, området gitt ved

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}.$$

Greens teorem gir så at

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (1-2x)\,dA = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy\,dx = \int_0^1 \big(2x^3 - x^2 - 2x^{3/2} + \sqrt{x}\big)\,dx = \frac{1}{30}.$$

6 I vårt tilfelle er

$$\mathbf{r}'(t) = \big(-4\cos(t)\sin(t), 2\cos(2t)\big) = \big(-2\sin(2t), 2\cos(2t)\big)$$

slik at partikkelen har beveget seg

$$s = \int_0^{3\pi/2} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{3\pi/2} 2\,dt = 3\pi \quad [\mathrm{m}]$$

ved $t = 3\pi/2$.

7 Ved å innføre polarkoordinater får vi at $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 20$ kan skrives som

$$3r^2 + 4r^2 \cos(\theta)\sin(\theta) = r^2\big(3 + 2\sin(2\theta)\big) = 20$$

slik at

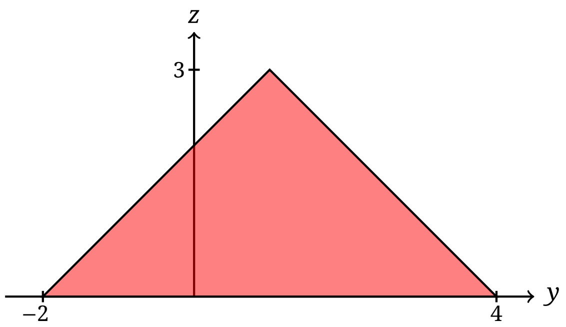
$$r^2 = \frac{20}{3 + 2\sin(2\theta)}.$$

Siden $-1 \leqslant \sin(2\theta) \leqslant 1$ får vi at

$$r^2 \geqslant \frac{20}{3+2} = 4,$$

det vil si, $r \geqslant 2$. Altså er den minste avstanden fra origo til kurven $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 20$ lik 2.

8 En skisse av projeksjonen av T i yz-planet er gitt i figuren under.



Legemet T er gitt ved

$$-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}, \qquad x^2 \leqslant z \leqslant 3, \qquad z - 2 \leqslant y \leqslant 4 - z.$$

Volumet av T er så gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{x^2}^{3} \int_{z-2}^{4-z} dy\,dz\,dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{x^2}^{3} \big(6 - 2z\big)\,dz\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \big[6z - z^2\big]_{z=x^2}^{3}\,dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \big(9 - 6x^2 + x^4\big)\,dx = \left[9x - 2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

9 La $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ slik at

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA = \sqrt{1 + 4\big(x^2 + y^2\big)}\,dx\,dy.$$

Dermed er

$$\iint_S \frac{8x}{\sqrt{1 + 4\big(x^2 + y^2\big)}}\,dS = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 8x\,dx\,dy = 4\int_0^1 \big(y - y^4\big)\,dy = \frac{6}{5}.$$

10 Legemet T er gitt ved

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant z \leqslant r^2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta) + 2 = r^2\big(2\sin^2(\theta) - 1\big) + 2$$

slik at volumet av T er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2\left(2\sin^2(\theta) - 1\right) + 2} dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(r^3\big(2\sin^2(\theta) - 1\big) + 2r\big)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin^2(\theta) + \frac{3}{4}\right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 2 \iiint_T dV = 4\pi$$

der ∂T er randen til T og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til T som peker ut av T. La så $\mathcal{B}$ være bunnen til T, det vil si, $\mathcal{B} = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ og la Σ være den delen av ∂T som ligger på sylinderen $x^2 + y^2 = 1$. Da er

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1)\, dS + \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)\, dS$$

slik at

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS - \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1)\, dS - \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)\, dS \\ &= 4\pi + \iint_{\mathcal{B}} (2z + 1)\, dS \\ &= 4\pi + \iint_{\mathcal{B}} dS \\ &= 4\pi + \pi = 5\pi.\end{aligned}$$