TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 3. juni 2024

1 La $g(x, y) = x + y$. For å benytte Lagranges multiplikatormetode trenger vi ∇p og ∇g:

$$\nabla p(x, y) = \big(10x + 2y, 2x + 6y\big), \qquad \nabla g(x, y) = \big(1, 1\big).$$

De nødvendige betingelsene for minste produksjonskostnad er:

$$\nabla p = \lambda \nabla g, \qquad g(x, y) = 39.$$

Fra $\nabla p = \lambda \nabla g$ får vi

$$\begin{aligned} 10x + 2y &= \lambda \\ 2x + 6y &= \lambda \end{aligned}$$

som gir

$$10x + 2y = \lambda = 2x + 6y \quad \text{det vil si} \quad 2x = y.$$

Fra $g(x, 2x) = 3x = 39$ får vi $x = 13$ og $y = 2x = 26$.
Den minste produksjonskostnaden er dermed

$$p(13, 26) = 5 \cdot 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 26 + 3 \cdot 26^2 = 4349.$$

2 Kjerneregelen gir

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\theta)\big)^{-1/2} \cdot \big(-2\sin(2\theta)\big) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{1 + \cos(2\theta)}}$$

slik at

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 1 + \cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} = \frac{\big(1 + \cos(2\theta)\big)^2 + \sin^2(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} = \frac{2 + 2\cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} = 2.$$

Buelengden er dermed

$$L = \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2\pi.$$

3 La

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vi må sjekke om g er kontinuerlig i $(0, 0)$. Legg merke til at

$$\frac{x^2 + 3x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Ved å innføre polarkoordinater får vi

$$g\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) = 1 + \frac{3r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2} = 1 + 3r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta).$$

Siden $|\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)| \leqslant 1$ gir skviseregelen at

$$\lim_{r \to 0}\big(1 + 3r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\big) = 1.$$

Altså er g kontinuerlig i $(0,0)$, og da g opplagt er kontinuerlig også for alle $(x,y) \neq (0,0)$ kan vi slutte at g er kontinuerlig. Legg også merke til at $g(x,y) \geqslant 1$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Siden $h(t) = \ln(t)$ er en kontinuerlig funksjon for alle $t > 0$, og $\ln(1) = 0$, samt at $g(x,y) \geqslant 1 > 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ må

$$f(x,y) = h\big(g(x,y)\big) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2+3x^2y^2+y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

være kontinuerlig for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{4}$ Vi har $\nabla f(x,y,z) = \big(e^y, xe^y, 2z\big)$ slik at

$$\nabla f\left(1, \ln(2), \frac{1}{2}\right) = \left(e^{\ln(2)}, 1 \cdot e^{\ln(2)}, 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = (2,2,1).$$

Den retningsderiverte til f i punktet $(1, \ln(2), 1/2)$ langs retningen $\mathbf{u}$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f\left(1, \ln(2), \frac{1}{2}\right) = \left|\nabla f\left(1, \ln(2), \frac{1}{2}\right)\right| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos(\theta) = \left|\nabla f\left(1, \ln(2), \frac{1}{2}\right)\right| \cdot \cos(\theta)$$

der θ er vinkelen mellom $\nabla f(1, \ln(2), 1/2)$ og $\mathbf{u}$, og hvor vi har brukt at $|\mathbf{u}| = 1$. Retningen $\mathbf{u}$ som gir at den retningsderiverte blir størst mulig er altså den retningen som peker i samme retning som $\nabla f(1, \ln(2), 1/2)$, det vil si, $\theta = 0$.

Altså gir retningen

$$\mathbf{u} = \frac{(2,2,1)}{|(2,2,1)|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

at den retningsderiverte til f i punktet $(1, \ln(2), 1/2)$ blir størst mulig.

$\boxed{5}$ En mulig parametrisering av C er

$$\mathbf{r}(t) = \big(-1+2t, 2-t\big)$$

for $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Dermed er

$$\int_C \frac{e^{x+y}}{\sqrt{5}}\, ds = \int_0^1 \frac{e^{-1+2t+2-t}}{\sqrt{5}} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^1 \frac{e^{1+t}}{\sqrt{5}} |(2,-1)|\, dt = \int_0^1 e^{1+t}\, dt = e^2 - e.$$

$\boxed{6}$ Siden vektorfeltet er konservativt må det også ha egenskapen at alle linjeintegral er uavhengig av vei. Vi kan derfor velge å integrere over en annen vei enn den som er oppgitt i oppgaveteksten.

Fra oppgaveteksten vet vi at kurven starter i punktet

$$\big(\sin(0), 1, 0\big) = (0,1,0)$$

og slutter i punktet

$$\big(\sin(4\pi), 24+1, 8-8\big) = (0,25,0).$$

La C' være det rette linjestykket fra $(0,1,0)$ til $(0,25,0)$. En mulig parametrisering av C' er

$$\mathbf{r}_{C'}(t) = (0, 1+24t, 0)$$

for $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}_{C'}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'_{C'}(t)\, dt = \int_0^1 (0, 12+288t, 0) \cdot (0,24,0)\, dt \\ &= \int_0^1 (288 + 6912t)\, dt = 3744.\end{aligned}$$

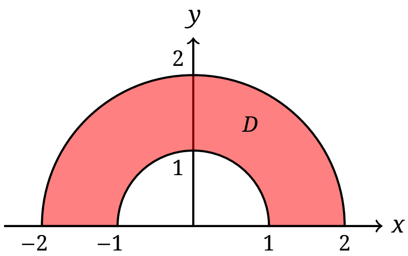
7 Området T er gitt i sylinderkoordinater som

$$1 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{og} \quad 1 \leqslant z \leqslant r^{3/2}.$$

Dermed er

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_1^{r^{3/2}} zr^2\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_1^2 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=1}^{r^{3/2}} \cdot r^2\,dr$$
$$= \pi\int_1^2 (r^3-1)r^2\,dr = \frac{49}{6}\pi.$$

8 En skisse av D er gitt i figuren under.



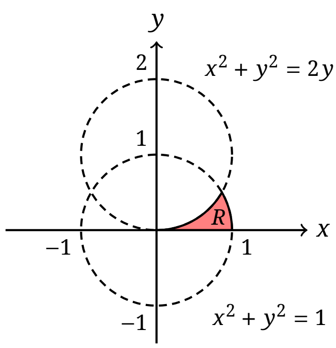
Legg merke til at området D kan beskrives i polarkoordinater som

$$1 \leqslant r \leqslant 2 \quad \text{og} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Fra Greens teorem har vi

$$\oint_{\partial D} \left(e^{x^2}+x^2y, x^3\right)\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2}+x^2y\right)\right)dA = \iint_D 2x^2\,dA$$
$$= \int_0^\pi\int_1^2 2r^3\cos^2(\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}r^4\right]_{r=1}^2 \cdot \cos^2(\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{15}{4}\int_0^\pi 2\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{15}{4}\int_0^\pi \left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta = \frac{15}{4}\pi.$$

9 En skisse av R er gitt i figuren under.



La $u(x,y) = x^2+y^2$ og $v(x,y) = x^2+y^2-2y$ slik at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y-2\end{vmatrix} = -4x$$

som igjen gir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{4x}.$$

Legg merke til at

$$u - v = 2y = 0$$

når $y = 0$. Området R svarer til et trekantformet område i uv-planet beskrevet ved

$$0 \leqslant u \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant v \leqslant u.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\iint_R 4x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)\,dA &= \int_0^1 \int_0^u 4xv\left|-\frac{1}{4x}\right| dv\,du = \int_0^1 \int_0^u v\,dv\,du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}u^2\,du = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

10 Fra oppgaveteksten får vi

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = 3(x^2 + y^2).$$

Divergensteoremet gir så

$$\begin{aligned}\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_T \left(x^2 + y^2\right)\,dV \\ &= 3\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \int_0^{2+x} \left(x^2 + y^2\right)\,dz\,dA = 3\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (2+x)\left(x^2+y^2\right)\,dA \\ &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2 + r\cos(\theta)\right)r^3\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cos(\theta)\right)d\theta \\ &= 3\pi.\end{aligned}$$