NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 6. august 2024

1 La $f(x,y,z) = x^3 + 2xyz + x\cos(z^2) - 2$. Da er

$$\nabla f(x,y,z) = \left(3x^2 + 2yz + \cos(z^2), 2xz, 2xy - 2xz\sin(z^2)\right)$$

som gir

$$\nabla f(1,-1,0) = (3+1, 0, -2) = (4, 0, -2).$$

Siden $\nabla f(1,-1,0)$ står normalt på nivåflaten $f(x,y,z) = 0$ i punktet $(1,-1,0)$ er

$$\nabla f(1,-1,0) \cdot (x-1, y+1, z) = (4,0,-2) \cdot (x-1, y+1, z) = 4x - 4 - 2z = 0.$$

En ligning for tangentplanet til flaten gitt som nivåflaten $f(x,y,z) = 0$ i punktet $(1,-1,0)$ er dermed gitt ved

$$2x - z = 2.$$

2 Definisjonsmengden D til vektorfeltet gitt i oppgaveteksten,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^x \ln(y), \frac{e^x}{y} + \sin(z), y\cos(z)\right),$$

er gitt ved $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ som er et enkeltsammenhengende område.

En mulig potensialfunksjon φ for $\mathbf{F}$ må tilfredsstille

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = e^x \ln(y) \tag{1}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{e^x}{y} + \sin(z) \tag{2}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = y\cos(z). \tag{3}$$

Integrerer vi (1), (2) og (3) med hensyn på henholdsvis x, y og z får vi

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= e^x \ln(y) + C_1(y,z) \\ \varphi(x,y,z) &= e^x \ln(y) + y\sin(z) + C_2(x,z) \\ \varphi(x,y,z) &= y\sin(z) + C_3(x,y). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\varphi(x,y,z) = e^x \ln(y) + y\sin(z)$$

en mulig potensialfunksjon for $\mathbf{F}$ (på det enkeltsammenhengende området D). Altså er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt.

Fra oppgaveteksten har vi

$$\mathbf{r}(t) = \left(1-t, t, 2\pi t\right)$$

for $1 \leqslant t \leqslant 2$. Ved å bruke potensialfunksjonen φ får vi

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \varphi(\mathbf{r}(2)) - \varphi(\mathbf{r}(1)) \\ &= \varphi(-1, 2, 4\pi) - \varphi(0, 1, 2\pi) \\ &= e^{-1}\ln(2) + 2\sin(4\pi) - e^0 \ln(1) - \sin(2\pi) \\ &= e^{-1}\ln(2). \end{aligned}$$

3 La

$$f(x,y,z) = \frac{3x - 2y - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Siden

$$f(x,0,0) = \frac{3x}{\sqrt{x^2}} \longrightarrow 3 \text{ når } x \longrightarrow 0+$$

og

$$f(x,0,0) = \frac{3x}{\sqrt{x^2}} \longrightarrow -3 \text{ når } x \longrightarrow 0-$$

kan ikke grenseverdien

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3x - 2y - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

eksistere.

4 La $z_1 = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ og $z_2 = (x^2 + y^2)/2$. For å finne en parametrisering av skjæringskurven C mellom flatene gitt ved z_1 og z_2 ser vi på

$$z_1 = z_2 \iff \sqrt{3 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Ved å kvadrere begge sider av den siste ligningen får vi

$$\begin{aligned} 3 - x^2 - y^2 &= \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 \\ 12 - 4x^2 - 4y^2 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ 12 &= x^4 + 4x^2 + 2x^2y^2 + 4y^2 + y^4 \\ 12 &= \left(x^2 + y^2\right)^2 + 4\left(x^2 + y^2\right). \end{aligned}$$

La så $u = x^2 + y^2$ slik at

$$u^2 + 4u - 12 = (u+6)(u-2) = 0$$

som gir at $u = 2$ (u kan ikke være lik -6 i og med at $u = x^2 + y^2$ er alltid større eller lik 0). Altså er projeksjonen av C i xy-planet gitt ved

$$x^2 + y^2 = 2.$$

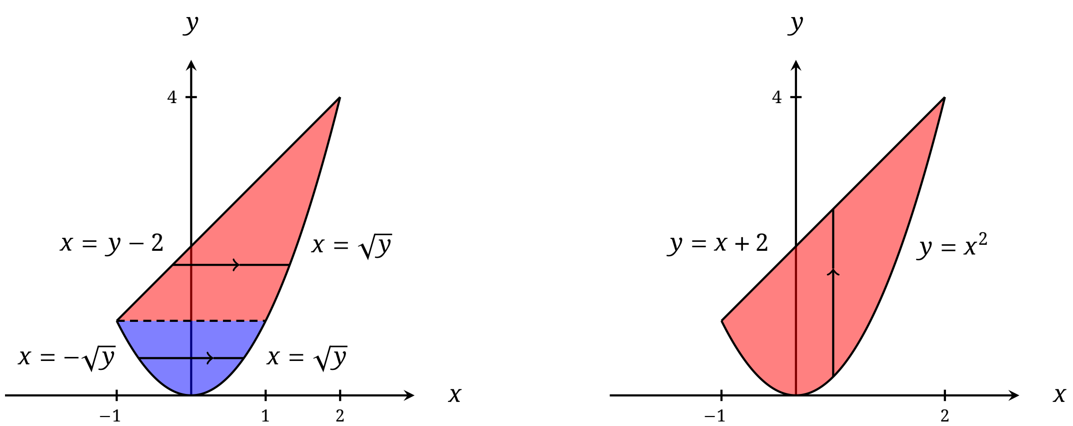
Legg merke til at når $x^2 + y^2 = 2$ så er $z_1 = z_2 = 1$.

En parametrisering av C er så gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), 1\right)$$

for $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5 En skisse av integrasjonsområdet er som følger



der figuren til venstre illustrerer integrasjonsområdet som to horisontalt enkle områder og figuren til høyre illustrerer integrasjonsområdet som ett vertikalt enkelt område.

Dermed er

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

$\boxed{6}$ La

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \big(x^4\cos(x^2) + 2y, e^{y^2} + 2x\big)$$

for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Siden $\mathbb{R}^2$ er et enkeltsammenhengende område og

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2 - 2 = 0$$

gir Greens teorem at

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

for enhver enkel, glatt, lukket kurve C i $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{7}$ La $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) = x+y+z$ og $h(x,y,z) = x^2+y^2$.

Ved å sette inn for $x^2+y^2 = 1$ i uttrykket for $f(x,y,z)$ får vi

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1+z^2$$

som er opplagt minst mulig når $z=0$. Innsatt for $z=0$ i uttrykket for $g(x,y,z)=1$ får vi

$$g(x,y,0) = x+y = 1 \iff y = 1-x.$$

Innsatt for $y = 1-x$ i $h(x,y,0) = 1$ får vi

$$x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 1 \iff x(x-1) = 0$$

som har løsning $x=0$ og $x=1$. Dermed har vi at punktene

$$(0, 1-0, 0) = (0,1,0) \quad \text{og} \quad (1, 1-1, 0) = (1,0,0)$$

er de punktene på skjæringskurven som ligger nærmest origo.

Alternativt kunne vi brukt Lagranges multiplikatormetode på $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ med to bibetingelser:

$$g(x,y,z) = x+y+z = 1 \quad \text{og} \quad h(x,y,z) = x^2+y^2 = 1.$$

De nødvendige betingelsene for minste verdi er:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla h, \quad g(x,y,z) = 1, \quad h(x,y,z) = 1.$$

Vi finner, ved noe regning, at $f(x,y,z)$ er *minst*, gitt bibetingelsene $g(x,y,z)=1$ og $h(x,y,z)=1$, når $(x,y,z) = (0,1,0)$ og $(x,y,z) = (0,1,0)$.

$\boxed{8}$ La

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2$$

for $x^2+y^2 \leqslant 1$. Flaten gitt som grafen til $z = f(x,y)$ har så arealelement

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dx\,dy \\ &= \sqrt{1 + \big(x^2-y^2\big)^2 + \big(-2xy\big)^2}\,dx\,dy \\ &= \sqrt{1 + \big(x^2+y^2\big)^2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{1+\left(x^2+y^2\right)^2}\,dS &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1+\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy\\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \left(1+\left(x^2+y^2\right)^2\right)dx\,dy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^4)r\,dr\,d\theta\\ &= 2\pi\int_0^1 \left(r+r^5\right)dr\\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Fra oppgaveteksten har vi at området T kan beskrives i kulekoordinater som

$$0\leqslant\rho\leqslant 3,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{og}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho\cos(\varphi)\cdot\rho\cdot\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{243}{5}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi\\ &= \frac{243}{20}\pi\int_0^{\pi/2}\sin(2\varphi)\,d\varphi\\ &= \frac{243}{20}\pi.\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ La

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(z, x, 5xz+4xy\right)$$

slik at

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\times\mathbf{F}(x,y,z) = \left(4x, 1-4y-5z, 1\right).$$

Stokes' teorem gir så

$$\oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} dS = \pi.$$