NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 16. mai 2023

1 Siden funksjonen $f(x, y)$ opplagt ikke har singulære punkter må den største verdien oppnås enten i et kritisk punkt eller på randen. Vi ser først etter kritiske punkter, altså punkter hvor $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$. Her er

$$\nabla f(x, y) = (2y, 2x),$$

så det eneste kritiske punktet er $(0, 0)$, hvor $f(0, 0) = 0$. Randen av området er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. For å finne maksimumsverdien her er det enkleste å parametrisere sirkelen med polarkoordinater; da får vi $f(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, så den største verdien er 1 når $\theta = \pi/4, 5\pi/4$; dette er da den største verdien av $f(x, y)$ på disken.

Vi kan også bruke Lagrange-multiplikatorer; da ser vi etter punkter (x, y) hvor $x^2 + y^2 = 1$ og

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla(x^2 + y^2),$$

altså $(y, x) = \lambda(x, y)$. Dette gir

$$y = \lambda x = \lambda^2 y,$$

slik at $y = 0$ eller $\lambda^2 = 1$. Hvis $y = 0$ får vi $x = \lambda y = 0$, men $(0, 0)$ ligger ikke på sirkelen. Vi må dermed ha $\lambda = \pm 1$ og $x = \pm y$. Setter vi dette inn i ligningen for sirkelen får vi

$$x^2 + y^2 = 2y^2 = 1$$

slik at $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi har altså fire kritiske punkter: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Det gjenstår å evaluere funksjonen her: $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)) = 1, f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)) = -1$, så den største verdien er igjen 1.

2 La $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, slik at S er en nivåflate av funksjonen f. Vi har $\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 6z)$; siden gradienten alltid er normal til nivåflatene har tangentplanet i punktet (a, b, c) normalvektoren $\nabla f(a, b, c) = (2a, 4b, 6c)$. Planet gjennom (a, b, c) med denne normalvektoren har ligning

$$(2a, 4b, 6c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0,$$

eller $2a(x - a) + 4b(y - b) + 6c(z - c) = 0$, som vi kan forenkle til

$$ax + 2by + 3cz = 1$$

siden $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$ ettersom punktet (a, b, c) ligger på S. Tangentplanet er parallelt med det gitte planet hvis og bare hvis normalvektorene til de to planene er parallelle. Planet $x + 2y + 3z = 0$ har normalvektor $(1, 2, 3)$, så vi ser etter punkter (a, b, c) på S hvor $(2a, 4b, 6c) = \lambda(1, 2, 3)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$. Siden vi da har $\lambda = 2a$ kan vi forenkle dette til

$$4a = 4b, \qquad 6a = 6c,$$

slik at $a = b = c$. Setter vi dette inn i ligningen for S får vi $a^2 + 2a^2 + 3a^2 = 6a^2 = 1$, som gir de to punktene

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1).$$

3 Et konservativt vektorfelt er alltid curl-fritt, så vi begynner med å regne ut curlen av de to vektorfeltene:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(3y^2 - 3y^2, 0 - 0, \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) = \mathbf{0},$$
$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = \left(3y^2 - 3y^2, 1 - 0, \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) = (0, 1, 0) \neq \mathbf{0}$$

Vektorfeltet **G** er dermed *ikke* konservativt. Vektorfeltet **F** *er* derimot konservativt, siden det er curl-fritt og definert på det enkeltsammenhengende området hvor $y > 0$. Dette følger selvfølgelig også av at **F** har en potensialfunksjon, som vi uansett nå skal vise: En potensialfunksjon $\varphi(x, y, z)$ må tilfredsstille ligningene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x + \ln y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y^2 z + \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^3.$$

Vi integrerer den første ligningen med hensyn til x og ser vi at vi må ha

$$\varphi = \tfrac{1}{2}x^2 + x \ln y + f(y, z).$$

Partiellderiverer vi dette med hensyn til y får vi ligningen

$$\frac{x}{y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 z + \frac{x}{y},$$

slik at $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 z$. Integerer vi denne ligningen med hensyn til y får vi $f(y, z) = y^3 z + g(z)$ og dermed

$$\varphi = \tfrac{1}{2}x^2 + x \ln y + y^3 z + g(z).$$

Til slutt partiellderiverer vi med hensyn til z, som gir

$$y^3 + \frac{dg}{dz} = y^3,$$

og dermed $\frac{dg}{dz} = 0$. Altså er $g(z)$ konstant, slik at

$$\varphi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + x \ln y + y^3 z$$

er en potensialfunksjon for **F**.

$\boxed{4}$ Vi har

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, e^t),$$

slik at

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + e^{2t}} = \sqrt{1 + e^{2t}}.$$

For $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$ får vi da

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)\, ds &= \int_0^\pi f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt \\ &= \int_0^\pi (1 + e^{2t})^{-1/2} \cdot e^{2t}\, dt.\end{aligned}$$

Vi bytter til variabelen $u = 1 + e^{2t}$ der endepunktene $t = 0, \pi$ tilsvarer $u = 2, 1 + e^{2\pi}$ og

$$du = 2e^{2t}\, dt.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)\, ds &= \int_2^{1+e^{2\pi}} \tfrac{1}{2} u^{-1/2}\, du \\ &= \left[u^{1/2}\right]_{u=2}^{u=1+e^{2\pi}} \\ &= \sqrt{1 + e^{2\pi}} - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

5 Buelengden $s(T)$ fra $t = 1$ til $t = T$ er gitt ved

$$s(T) = \int_1^T |\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Vi har $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, (t-1)^{1/2})$ og

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (t-1)} = \sqrt{t},$$

slik at

$$s(T) = \int_1^T \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{t=1}^{t=T} = \frac{2}{3}(T^{3/2} - 1).$$

6 Linjen $x = y$ der $x, y \geqslant 0$ er linjen med vinkel $\theta = \pi/4$, mens linjen $x = -y$ tilsvarer $\theta = 3\pi/4$. Linjene $y = 1$ og $y = 2$ svarer i polarkoordinater til $r = \frac{1}{\sin\theta}$ og $r = \frac{2}{\sin\theta}$ (hvor $\sin\theta \neq 0$). Vi kan dermed beskrive området R i polarkoordinater som punktene (r, θ) hvor $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4$ og

$$\frac{1}{\sin\theta} \leqslant r \leqslant \frac{2}{\sin\theta}.$$

Dette gir at det gitte dobbeltintegralet kan uttrykkes som et iterert integral i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 + y^2)^{-3/2}\,dA &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin\theta}^{2/\sin\theta} r^{-3} \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[-r^{-1}\right]_{r=1/\sin\theta}^{r=2/\sin\theta} d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\sin\theta - \frac{\sin\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \left[-\cos\theta\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=3\pi/4} \\
&= \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} - \cos\tfrac{3\pi}{4}) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

7 For å vise at $f(x, y)$ er kontinuerlig ser vi på grensen i polarkoordinater:

$$\lim_{r\to0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0 = f(0,0).$$

Siden grenseverdien ikke er avhengig av θ er dette også grensen $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, slik at f er kontinuerlig i origo. De partiellderiverte i origo er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Hvis f er deriverbar må vi ha at den retningsderiverte i en retning $\mathbf{u}$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

I retningen hvor $x = y$ (altså $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$) har vi derimot

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{h^3}{2h^2} - 0}{h} = \tfrac{1}{2} \neq 0,$$

slik at f *ikke* kan være deriverbar.

8 La T være området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av R og planene $z = -1$, $z = 1$. Da er randen av T gitt ved R sammen med sirkelskivene

$$S_\pm = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 2, z = \pm 1\}.$$

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 + e^{yz} z^3, 2(1 - x)y + x^3 \tan z, 0\right).$$

Da gir divergensteoremet at

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_R \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{S_+} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{S_-} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

hvor normalvektoren $\hat{\mathbf{N}}$ alltid peker ut av T. Vi har

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2(1 - x) + 0 = 2.$$

I tillegg ser vi at på $S_\pm$ er $\hat{\mathbf{N}}$ parallell med z-aksen samtidig som $\mathbf{F}$ har z-komponent null, slik at $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ her. Dermed får vi

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T 2\, dV.$$

For å regne ut dette volumintegralet kan vi bruke sylinderkoordinater; da er hyperboloiden R gitt ved ligningen $r^2 - z^2 = 1$ eller $r = \sqrt{1 + z^2}$, slik at T er beskrevet av ulikhetene

$$-1 \leqslant z \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1 + z^2}.$$

Vi får da

$$\begin{aligned}
\iiint_T 2\, dV &= \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \int_0^{2\pi} 2r\, d\theta\, dr\, dz \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left[r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1+z^2}} dz \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (1 + z^2)\, dz \\
&= 2\pi \left[z + \tfrac{1}{3} z^3\right]_{z=-1}^{z=1} \\
&= 2\pi \left(1 + \tfrac{1}{3} + 1 + \tfrac{1}{3}\right) \\
&= \tfrac{16}{3}\pi.
\end{aligned}$$

9 La $\mathbf{F}(x, y, z)$ være vektorfeltet $(2xy, y^{2023}, -x^2)$. Stokes' teorem gir da

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Vi har

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = (0 - 0, 0 + 2x, 0 - 2x) = (0, 2x, -2x).$$

Flaten T er en del av planet $x + y + z = 1$ med normalvektor $(1, 1, 1)$ slik at enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}$ er

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Da får vi

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (0, 2x, -2x) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(2x - 2x) = 0.$$

Integralet er dermed lik 0.

10 Vi parametriserer først flaten S over området $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ i planet ved $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Da er arealelementet

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy.$$

Arealet av S er dermed

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy.$$

For å regne ut dette kan vi bruke polarkoordinater, som gir

$$\iint_S dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr.$$

Nå bytter vi til variabelen $u = 1 + 4r^2$; grenseverdiene $r = 0, 1$ tilsvarer da $u = 1, 5$, og vi har

$$du = 8r\, dr.$$

Vi får

$$\iint_S dS = 2\pi \cdot \tfrac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u}\, du = \tfrac{\pi}{4} \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_{u=1}^{u=5} = \tfrac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right).$$

(Vi kan også direkte parametrisere flaten S med polarkoordinater som

$$\mathbf{s}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$$

for $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Da kan vi finne arealelementet ved følgende utregning:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 2r), \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r),$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1},$$

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta}\right| dr\, d\, d\theta = r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr\, d\theta.$$

Dette gir nå det samme integralet for arealet av S som ovenfor.)