TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 8. august 2023

1 Vi har

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 3y, -3x - 3y^2\right),$$

så de kritiske punktene er punktene (x,y) der

$$y = x^2, \qquad x = -y^2.$$

Vi må dermed ha $y = (-y^2)^2 = y^4$ som betyr at y er 0 eller 1. Hvis $y = 0$ får vi $x = 0$ og for $y = 1$ får vi $x = -1$ siden $x = -y^2$. De kritiske punktene er dermed $(0,0)$ og $(-1,1)$. For å klassifisere disse bruker vi annenderiverttesten. Vi har

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

For $(0,0)$ får vi dermed

$$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0,$$

så dette er et sadelpunkt, mens for $(-1,1)$ får vi

$$AC - B^2 = (-6) \cdot (-6) - (-3)^2 = 25 > 0,$$

og siden $A = -6 < 0$ er dette et lokalt maksimum. Funksjonen f har ikke en global maksimums- eller minimumsverdi siden $f(x,0) = x^3$ som oppnår vilkårlig store positive og negative verdier.

2 Vi bytter til variablene $u = x^2 - y^2$, $v = xy$. For å finne jacobideterminanten regner vi ut

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x,$$

som gir

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = (2x)(x) - (-2y)(y) = 2(x^2 + y^2)$$

og $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1}$. Siden $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ får vi

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^4 - y^4)\, dA &= \int_3^4 \int_1^2 (x^4 - y^4) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv \\
&= \int_3^4 \int_1^2 \tfrac{1}{2} u \, du\, dv \\
&= \int_3^4 \tfrac{1}{4} \left[u^2\right]_{u=1}^{u=2} dv \\
&= \int_3^4 \tfrac{3}{4}\, dv \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

3 Vi kan finne f enten ved å se på ligningen $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ eller ved å prøve å finne en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$; her velger vi den siste metoden. Hvis $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ må vi ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \sin z, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos z + y.$$

Den første ligningen gir

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 \sin z + \psi(y, z),$$

slik at den andre ligningen blir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \cos z + y,$$

som i sin tur gir

$$\psi(y, z) = y \cos z + \frac{1}{2}y^2 + h(z),$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 \sin z + y \cos z + \frac{1}{2}y^2 + h(z).$$

For den z-deriverte får vi da

$$f(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}x^2 \cos z - y \sin z + h'(z),$$

som gir oss en løsning for en vilkårlig deriverbar funksjon $h(z)$. For eksempel kan vi ta $h(z) = 0$ og

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 \cos z - y \sin z.$$

4 Vi vet at $\nabla f(a, b)$ peker i retningen hvor funksjonen f øker mest fra punktet $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, slik at retningen hvor f avtar sterkest er enhetsvektoren med retning $-\nabla f(a, b)$. For vår funksjon f har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(16 - 4x^2 - y^2)^{-1/2}(-8x) = \frac{-4x}{f(x, y)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(16 - 4x^2 - y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{-y}{f(x, y)}.$$

For $(x, y) = (1, 2)$ har vi $f(1, 2) = 2\sqrt{2}$, slik at

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{-4}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vi har $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, og dermed er retningen vi ønsker

$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Tangentplanet til grafen $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$ har ligning

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

I vårt tilfelle får vi

$$z = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 2)$$

som vi kan forenkle til

$$2x + y + \sqrt{2}z = 8.$$

5 La R være området omkranset av C, og sett $P(x, y) = e^{\sqrt{x}} + y(2x - 1)$, $Q(x, y) = x^2 + \sqrt{\cos(y^3)}$. Da har vi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$$

slik at Greens teorem gir

$$\oint_C (P, Q) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 1 \, dA.$$

Dette integralet gir oss arealet av området R, som er en trekant med grunnlinje 2 og høyde 2, slik at integralet har verdi $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

6 For å finne krumningen bruker vi formelen

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}.$$

Vi har

$$\mathbf{r}'(t) = (c, -\sin t, \cos t), \qquad \mathbf{r}''(t) = (0, -\cos t, -\sin t),$$
$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (1, c\sin t, -c\cos t),$$
$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{c^2+1}, \qquad |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{1+c^2},$$
$$\kappa = \frac{\sqrt{1+c^2}}{(\sqrt{1+c^2})^3} = \frac{1}{1+c^2}.$$

Vi ser at κ er konstant, og den største mulige krumningen oppnås for $c = 0$.

7 Vi må finne en funksjon φ slik at $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Vi regner derfor ut

$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, 2\right).$$

Funksjonen φ må altså tilfredsstille ligningene

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = e^{z^2\cos z}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2xe^{\sin z}.$$

Integrerer vi den første ligningen med hensyn til y får vi

$$\varphi(x,y,z) = ye^{z^2\cos z} + \psi(x,z);$$

vi setter så dette inn i den andre ligningen og får

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -2xe^{\sin z}.$$

Til slutt integrerer vi dette med hensyn til x og får

$$\psi(x,z) = -x^2e^{\sin z} + f(z).$$

Dette gir et vektorpotensial for alle deriverbare funksjoner $f(z)$; vi kan for eksempel ta $f(z) = 0$, som gir løsningen

$$\varphi(x,y,z) = ye^{z^2\cos z} - x^2e^{\sin z}.$$

Flaten S er en del av en ellipsoide, og randen C består av de punktene på S hvor $z = 0$ — det vil si at C er sirkelen $x^2 + y^2 = 4$; orienteringen av C som er positiv med hensyn til den gitte normalen $\hat{\mathbf{N}}$ er da orienteringen mot klokken. For å regne ut flateintegralet av $\mathbf{F}$ kan vi bruke Stokes' teorem, siden vi vet at $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{G}$ for vårt valg av φ:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}.$$

Vi kan parametrisere C med positiv orientering ved

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Da har vi $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$ slik at

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 2\cos t, \varphi(\mathbf{r}(t)))\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\,dt = 8\pi.
\end{aligned}$$

8 For $\mathbf{u} = (a, b)$ og $h \neq 0$ har vi

$$\frac{f(h\mathbf{u}) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^3a^3 - h^3ab^2}{h^2a^2 + h^2b^2} - 0}{h} = \frac{a^3 - ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Siden dette er en konstant funksjon av h får vi da grenseverdien

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \frac{a^3 - ab^2}{a^2 + b^2}$$

for $h \to 0$. Vi merker oss spesielt at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0,$$

slik at $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Hvis f er deriverbar i $(0,0)$ må vi ha

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(0,0).$$

Men hvis $a = b$ har vi

$$D_{(a,a)} f(0,0) = 0, \qquad (a,a) \cdot \nabla f(0,0) = (a,a) \cdot (1,0) = a.$$

Siden disse er forskjellige ser vi at f *ikke* er deriverbar i $(0,0)$.

9 Vi parametriserer S som $\mathbf{r}(y,z) = (-2y - 3z, y, z)$ for $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, som gir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-2, 1, 0), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-3, 0, 1),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (1, 2, 3).$$

(Dette gir mening siden S er en del av et plan med normalvektor $(1,2,3)$.) Vi ser at denne vektoren peker oppover, så dette er korrekt orientering. La $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, 3y - x, 1 - 2y)$; da har vi

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(y,z)) = (-4y - 6z, 3y - (-2y - 3z), 1 - 2y) = (-4y - 6z, 5y - 3z, 1 - 2y),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(y,z)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right) = (-4y - 6z, 5y + 3z, 1 - 2y) \cdot (1,2,3) = -4y - 6z + 10y + 6z + 3 - 6y = 3.$$

Flateintegralet blir da

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \int_{-1}^{1} \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(y,z)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right) dz\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} \int_0^1 3\, dz\, dy \\ &= 6.\end{aligned}$$

10 I kulekoordinater har vi $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \cos\varphi$ slik at

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta} = \rho \sin\varphi$$

(siden vi begrenser φ til $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ hvor $\sin\varphi \geqslant 0$). I kulekoordinater blir ligningene for de to kjeglene dermed (hvis vi ser bort fra origo hvor $\rho = 0$)

$$\rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi \iff \cos\varphi = \sin\varphi \iff \tan\varphi = 1,$$

$$\rho\cos\varphi = \sqrt{3}\rho\sin\varphi \iff \cos\varphi = \sqrt{3}\sin\varphi \iff \tan\varphi = 1/\sqrt{3}.$$

Antagelsen $z \leqslant 0$ svarer til $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, så den delen av kjeglene hvor $z \geqslant 0$ er gitt ved ligningene $\varphi = \pi/4$ (siden $\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$) og $\varphi = \pi/6$ (siden $\sin \pi/6 = 1/2$ og $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$). Området T kan vi dermed beskrive i kulekoordinater med ulikhetene

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad \pi/6 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4.$$

Divergensen av vektorfeltet $\mathbf{F}$ er

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y}(3z^2 y + y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + \cos y) = 3x^2 + 3z^2 + 3y^2 = 3\rho^2.$$

For å regne ut flateintegralet av $\mathbf{F}$ over S kan vi bruke divergensteoremet, som gir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

Dette trippelintegralet kan vi så regne ut i kulekoordinater:

$$\begin{aligned}
\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{5} \rho^5 \sin \varphi \right]_{\rho_0}^{\rho=1} d\theta \, d\varphi \\
&= \frac{6}{5}\pi \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{6}{5}\pi \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=\pi/6}^{\varphi=\pi/4} \\
&= \frac{6}{5}\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= \frac{3}{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\pi.
\end{aligned}$$