TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 16. mai 2022

1 Vi kan bruke Lagranges multiplikatormetode for å finne kandidater for største og minste verdi av $f(x,y) = xy$ på ellipsen $x^2/2 + y^2 = 1$. Lagrangefunksjonen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right) = xy - \lambda\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right)$$

har kritiske punkter der $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$. I vårt tilfelle er

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda), \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda), \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)\right) = \left(y - \lambda x, x - 2\lambda y, \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right),$$

slik at $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ gir ligningene

$$y - \lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x - 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Fra (1) får vi $y = \lambda x$, som innsatt i (2) gir

$$x - 2\lambda^2 x = x(1 - 2\lambda^2) = 0.$$

Altså må vi ha $x = 0$ eller $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Hvis $x = 0$, har vi fra (3) at $y = \pm 1$. Punktene $(0, \pm 1)$ oppfyller imidlertid ikke (1). Hvis $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$, så er $y = \pm x/\sqrt{2}$, og innsatt i (3) gir dette $x = \pm 1$.
Kandidatene for største og minste verdi av f er dermed

$$f\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siden f er en kontinuerlig funksjon og kurven $x^2/2 + y^2 = 1$ er en lukket og begrenset mengde må f oppnå en største og minste verdi blant punktene vi har funnet. Det vil si at den minste verdien av f er $-1/\sqrt{2}$ og den største verdien av f er $1/\sqrt{2}$.
Oppgaven kan også løses *uten* bruk av Lagranges multiplikatormetode. Ellipsen $x^2/2 + y^2 = 1$ er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sin t\right), \qquad -\pi \leqslant t < \pi,$$

og innsatt i f får vi

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}\cos t, \sin t\right) = \sqrt{2}\sin t \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t.$$

Funksjonen $g(t) = \sin 2t/\sqrt{2}$ har sine ekstremalverdier der

$$g'(t) = \sqrt{2}\cos 2t = 0 \implies t = \pm\frac{\pi}{4},\ t = \pm\frac{3\pi}{4}.$$

Innsatt i g finner vi igjen at

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{og} \quad g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2 La $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$. Vi har

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 2z),$$

og tangentplanet til ellipsoiden $f(x, y, z) = 1$ i punktet (a, b, c) har normalvektor

$$\nabla f(a, b, c) = (2a, 4b, 2c).$$

Altså er tangentplanet gitt ved ligningen

$$2a(x - a) + 4b(y - b) + 2c(z - c) = 0 \quad \text{eller} \quad ax + 2by + cz = a^2 + 2b^2 + c^2 = 1.$$

Vi skal så finne alle punkter på ellipsoiden hvor tangentplanet er parallelt med planet $x + y + z = 1$. Vi må da finne alle punkter hvor normalvektoren $\nabla f(a, b, c)$ er parallell med vektoren $(1, 1, 1)$. Dette gir oss ligningene

$$\begin{aligned} a &= \lambda \\ 2b &= \lambda \\ c &= \lambda, \end{aligned}$$

hvor λ er et reelt tall. Innsatt i f får vi

$$f\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right) = \frac{5}{2}\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Dette gir punktene

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \quad \text{og} \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{1}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

hvor tangentplanet til ellipsoiden er parallelt med planet $x + y + z = 1$.

3 En potensialfunksjon φ til vektorfeltet $\mathbf{F} = (y, x - z\sin y, \cos y)$ må nødvendigvis oppfylle

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (y, x - z\sin y, \cos y).$$

Dette gir oss ligningssystemet

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x - z\sin y \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos y \tag{6}$$

Fra ligning (5) følger det at

$$\varphi(x, y, z) = xy + z\cos y + C(x, z),$$

og ved å partiellderivere dette uttrykket med hensyn på henholdsvis x og z, ser vi at også (4) og (6) er oppfylt dersom $C(x, z)$ er en konstant. Én mulig potensialfunksjon for $\mathbf{F}$ er dermed

$$\varphi(x, y, z) = xy + z\cos y.$$

Ettersom vektorfeltet $\mathbf{F}$ er konservativt, vet vi at linjeintegralet er uavhengig av vei. Vi får derfor

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(1, 0, 2\pi) - \varphi(1, 0, 0) = 2\pi.$$

4 Funksjonen g *er* kontinuerlig i origo, da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = g(0,0) = 0.$$

For å vise dette skriver vi om til polarkoordinater. For $(x, y) \neq (0,0)$ har vi at

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2} \\ &= r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta). \end{aligned}$$

Legg merke til at $(x, y) \to (0,0)$ hvis og bare hvis $r \to 0$. Siden $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ er en begrenset funksjon av θ har vi at

$$\lim_{r\to 0} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0,$$

og dermed er

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim_{r\to 0} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = g(0,0).$$

5 Buelengdeparametriseringen av en kurve $\mathbf{r}(t)$ der $t \geqslant 0$ er gitt ved $\mathbf{r}(t(s))$, der

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)|\, d\tau.$$

I vårt tilfelle er

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\cos t, -\sin t, \sqrt{3}\right),$$

og

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 3} = \sqrt{4} = 2.$$

Dermed er

$$s = s(t) = \int_0^t 2\, d\tau = 2t.$$

Løst for t får vi $t(s) = s/2$, og innsatt gir dette buelengdeparametriseringen

$$\mathbf{r}(s) = \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right), \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}s\right).$$

Krumningen til kurven C er gitt ved

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\widehat{\mathbf{T}}}{ds}\right|, \qquad \text{der} \qquad \widehat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Fra buelengdeparametriseringen får vi derfor at

$$\widehat{\mathbf{T}}(s) = \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

og

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}}{ds} = \left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right), 0\right).$$

Dermed blir krumningen

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\widehat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2\cos^2\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

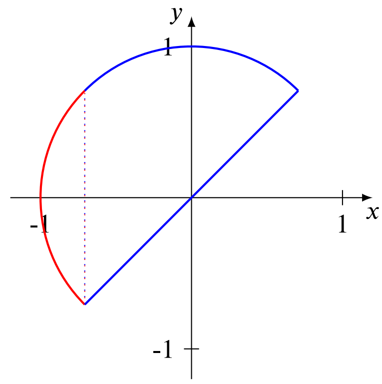
6 Figuren på neste side viser en skisse av integrasjonsområdet for integralet i xy-planet.

La oss kalle dette området R. I polarkoordinater får vi

$$R = \left\{(r,\theta)\ :\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

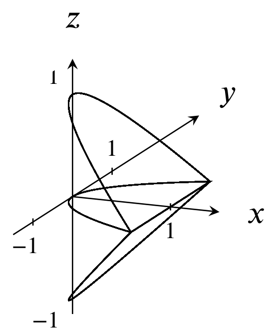
Et variabelbytte til polarkoordinater gir dermed

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^1 \frac{2}{1+r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[\ln(1+r^2)\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \ln 2 \cdot \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \ln 2. \end{aligned}$$



7 Vi ser fra skissen at området T er gitt ved $T = \left\{(x,y,z)\ :\ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant 1,\ x-1 \leqslant z \leqslant -x+1\right\}$. Dermed er

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(T) &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_{x-1}^{-x+1} dz\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 (2-2x)\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^1 [2x - x^2]_{x=y^2}^{x=1}\, dy = \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4)\, dy \\ &= \left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^1 = 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$



8 Divergensteoremet sier at

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV,$$

der D er volumet begrenset av S. Her er

$$D = \left\{(x,y,z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\},$$

og

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

I kulekoordinater har vi at

$$D = \{(\rho,\varphi,\theta)\ :\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Om vi gjør et variabelbytte til kulekoordinater får vi

$$\begin{aligned} \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\varphi \left[\frac{3}{5}\rho^5\right]_0^1 d\varphi\, d\theta \\ &= \frac{3}{5}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12\pi}{5}. \end{aligned}$$

9 **a)** Vi har

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sin t \\ y(t) &= \cos t \\ z(t) &= 2 + \sin t, \end{aligned}$$

og ser dermed at

$$2z = 4 + 2\sin t = 4 + x.$$

Alle punkter på kurven C oppfyller denne ligningen. Altså ligger kurven i planet $2z - x = 4$. Videre har vi at

$$\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 + (y(t))^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Dette viser at projeksjonen av C i xy-planet er ellipsen gitt ved $x^2/4 + y^2 = 1$.

b) Ved Stokes' teorem har vi at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der S er en stykkevis glatt, orientert flate, med rand C, hvis enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ samsvarer med orienteringen av C. Vi kan for eksempel velge S gitt ved

$$z = \frac{x}{2} + 2, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1.$$

Denne har normalvektor $\pm(-1/2, 0, 1)$, og hvis orienteringen av S skal indusere orienteringen av C (gitt av parametriseringen $\mathbf{r}(t)$) må vi velge

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) dx\, dy.$$

Til slutt finner vi

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = (0, -ze^{xz}, -x)\,.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \\
&= \iint_{x^2/4+y^2\leqslant 1} (0, -ze^{xz}, -x) \cdot \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) dx\, dy \\
&= \iint_{x^2/4+y^2\leqslant 1} x\, dx\, dy = 0,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at funksjonen x og integrasjonsområdet $x^2/4 + y^2 \leqslant 1$ begge er symmetriske om y-aksen. Alternativt kan vi gjøre variabelskiftet

$$\begin{aligned}
x &= 2r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta,
\end{aligned}$$

og observere at

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2/4+y^2\leqslant 1} x\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\cos\theta \cdot 2r\, dr\, d\theta \\
&= 4\left(\int_0^1 r^2\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$