NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løysingsforslag

Eksamen 10. august 2022

1 Sidan hyperboloiden ikkje har nokre randpunkt held det å sjekka dei kritiske punkta med hjelp av lagrangemultiplikatorar. Lèt me

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xy + 1, \qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

skal me då finna punkta (x,y,z) der $f(x,y,z) = 0$ og $\nabla f = \lambda \nabla g$. Me har

$$\nabla f = (2y, 2x, 2z), \qquad \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

og får dermed likningane

$$\begin{aligned} z^2 + 2xy + 1 &= 0 \\ 2y &= 2\lambda x \\ 2x &= 2\lambda y \\ 2z &= 2\lambda z. \end{aligned}$$

Frå den siste likninga ser me at me må ha $\lambda = 1$ eller $z = 0$. Men viss $\lambda = 1$ har me òg $x = y$ og den fyrste likninga vert dermed

$$z^2 + 2x^2 + 1 = 0,$$

som er umogleg for reelle tal x, z. Altso er $z = 0$.
Sidan $y = \lambda x = \lambda^2 y$ er $\lambda^2 = 1$ eller $y = 0$. Men viss $y = z = 0$ har me inga løysing av den fyrste likninga, og sidan me allereie har utelukka $\lambda = 1$ er me nøydde til å ha $\lambda = -1$ og dermed $x = -y$. Set me dette inn i den fyrste likninga i lag med $z = 0$ får me

$$0 - 2y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Likningssystemet vårt har altso dei to løysingane

$$(x,y,z) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Evaluerer me g i desse to punkta får me

$$g\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1,$$

so båe desse punkta har same avstand frå origo. For å visa at dette er minimumsavstanden kan me observera at me kan finna punkt vilkårleg langt vekke frå origo som ligg på hyperboloiden, slik at det ikkje finst nokon maksimumsavstand.

2 Viss me skriv $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ har me

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = t^4 + t^2(1-t^2) + (1-t^2) = t^4 + t^2 - t^4 + 1 - t^2 = 1.$$

Kurva ligg altso på kuleskalet med radius 1 og sentrum origo. For å finna einingstangenten reknar me ut

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(2t, \sqrt{1-t^2} + \frac{t}{2}\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right) \\
&= \left(2t, \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\
&= \left(2t, \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\
|\mathbf{r}'(t)|^2 &= 4t^2 + \frac{(1-2t^2)^2}{1-t^2} + \frac{t^2}{1-t^2} \\
&= \frac{4t^2 - 4t^4 + 1 - 4t^2 + 4t^4 + t^2}{1-t^2} \\
&= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\
\widehat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\left(2t, \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\
&= \left(\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1-2t^2}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Me skiftar til variablane $u = xy$, $v = \frac{x^2}{y}$, slik at området me integrerer over er skildra av ulikskapane

$$1 \leqslant u \leqslant 4, \qquad 1/2 \leqslant v \leqslant 1.$$

So lyt me rekna ut jacobideterminanten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \end{vmatrix} \\
&= y \cdot \frac{-x^2}{y^2} - x \cdot \frac{2x}{y} = -3\frac{x^2}{y} = -3v, \\
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = -\frac{1}{3v}.
\end{aligned}$$

Me merkar oss òg at i dei nye koordinatane har me

$$y^3 = (xy)^2 \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{u^2}{v}$$

slik at integralet vert

$$\begin{aligned}
\iint_D y^3\,dA &= \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{4} \frac{u^2}{v}\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv\\
&= \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{4} \frac{u^2}{3v^2}\,du\,dv\\
&= \int_{1/2}^{1}\left[\frac{u^3}{9v^2}\right]_{u=1}^{u=4}\,dv\\
&= \frac{4^3-1}{9}\int_{1/2}^{1}\frac{1}{v^2}\,dv\\
&= 7\left[-\frac{1}{v}\right]_{v=1/2}^{v=1} = 7\cdot(-1+2) = 7.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Lat oss kalla området avgrensa av flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 4$ for D; då er massen me ynskjer å finna gjeven ved integralet

$$\iiint_D \delta(x,y,z)\,dV = \iiint_D 2z\,dV.$$

For å rekna ut dette nyttar me sylinderkoordinatar. Flata $z = x^2 + y^2$ er ei kjegle medan $z = 4$ er eit plan parallelt med xy-planet, og me ser at området mellom dei er skildra i sylinderkoordinatar av ulikskapane

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 4, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}.$$

Integralet vårt vert då

$$\begin{aligned}
\iiint_D 2z\,dV &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} 2z\cdot r\,d\theta\,dr\,dz\\
&= 2\pi\int_0^4 \left[zr^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}}\,dz\\
&= 2\pi\int_0^4 z^2\,dz\\
&= 2\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{4}\\
&= \frac{2\cdot 4^3}{3}\pi = \frac{128\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ I polarkoordinatar får me

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

for $r \neq 0$. Dermed er grenseverdien

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$$

ikkje uavhengig av θ, som tyder at funksjonen ikke er kontinuerleg i origo. Sidan funksjonen ikke er kontinuerleg kan han heller ikkje vera deriverbar i origo.

6 Det er opplagd at $\mathbf{F}$ er eit glatt vektorfelt definert på heile $\mathbb{R}^3$. For å sjå om $\mathbf{F}$ er konservativt held det dermed å sjekka om $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ er $\mathbf{0}$. Lat oss skriva $\mathbf{F} = (P, Q, R)$; då er

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz), \frac{\partial}{\partial z}(e^x) - \frac{\partial}{\partial x}(2x), \frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x) \right) \\
&= (0 - xy, 0 - 2, yz - 0) \\
&\neq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Altso er $\mathbf{F}$ *ikkje* konservativt. Lat oss no rekna ut linjeintegralet:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (e^{\cos t}, 0, 2\cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - \sin t\, e^{\cos t})\, dt
\end{aligned}$$

Her ser me at $-\sin t\, e^{\cos t} = \frac{de^{\cos t}}{dt}$, slik at

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t\, e^{\cos t})\, dt = \left[e^{\cos t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

For å finna integralet av $\cos^2 t$ lyt me hugsa at $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$; då får me

$$\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t = \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi.$$

Til saman får me altso at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

(Dette viser òg at $\mathbf{F}$ ikkje er konservativt, sidan linjeintegralet av eit konservativt vektorfelt langs ei lukka kurve alltid er 0.)

7 Lat D vera området i $\mathbb{R}^2$ som er omkransa av ellipsen $\mathcal{C}$. Om me skriv $\mathbf{F} = (P, Q)$ seier då Greens teorem at

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_D \left(\frac{y^2(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{6y^2 x}{3\sqrt{1-x^2}} \right) dA \\
&= \iint_D \frac{-3y^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dA.
\end{aligned}$$

Me kan skildra området D med ulikskapane

$$-3 \leqslant y \leqslant 3, \qquad -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{3}\right)^2} \leqslant y \leqslant 3\sqrt{1 - \left(\frac{y}{3}\right)^2},$$

slik at dobbeltintegralet kan verta utrekna som

$$\iint_D \frac{-3y^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dA = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{1-(\frac{y}{3})^2}}^{\sqrt{1-(\frac{y}{3})^2}} \frac{-3y^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy.$$

Her ser me at integranden er ein odde funksjon av x, so det indre integralet må vera 0, og dermed er òg dobbeltintegralet lik 0.

$\boxed{8}$ Me veit at viss eit vektorfelt har eit vektorpotensial so må det vera divergensfritt, og me kan difor freista å visa at eit eller fleire av vektorfelta ikkje har vektorpotensial ved å sjå på divergensane deira:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y-x)^2 + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz+z)\\
&= 2x + 2(y-x) - 2y + 1 = 1,\\
\operatorname{div}\mathbf{G} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y-x)^2 + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz)\\
&= 2x + 2(y-x) - 2y = 0,
\end{aligned}$$

Me ser at **F** ikkje kan ha noko vektorpotensial, medan **G** må ha det (sidan det er eit glatt vektorfelt definert på heile $\mathbb{R}^3$).

For å finna eit vektorpotensial $\mathbf{H} = (P, Q, R)$ for **G** må me løysa likningane

$$(x^2, (y-x)^2, -2yz) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Me freistar å finna ei løysing kor $R = 0$. Då har me

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x^2 \quad \Rightarrow \quad Q = -x^2z + f(x,y).$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = (y-x)^2 \quad \Rightarrow \quad P = (y-x)^2z + g(x,y).$$

Her kan me prøva å setja $f(x,y) = 0$; då gjev den siste likninga

$$-2yz = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2xz - 2(y-x)z + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Me får $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ som einaste avgrensing av g og kan like godt taka $g = 0$. Då er altso

$$\mathbf{H} = \big((y-x)^2z, -x^2z, 0\big)$$

eit vektorpotensial for **G**.

$\boxed{9}$ Lat D vera området i $\mathbb{R}^3$ der $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z$ og $0 \leqslant z \leqslant 1$, og lat $\mathcal{S}'$ vera området der $z = 1$ og $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1$. Då er randa av D sett saman av dei to lutane $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$, og me merkar oss at den gjevne normalvektoren for $\mathcal{S}$ peiker *ut* or D. Frå divergensteoremet får me dermed at

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS,$$

og kan difor finna integralet over $\mathcal{S}$ ved å rekna ut integrala over D og $\mathcal{S}'$. Men einingsnormalvektoren på $\mathcal{S}'$ er opplagt $(0,0,1)$, medan z-komponenten til **F** er 0, slik at $\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}} = 0$ på $\mathcal{S}'$; integralet over $\mathcal{S}'$ er difor 0.

Divergensen til $\mathbf{F}$ er gjeven ved

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(zx^3 + e^{-z}\cos y) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{4}{3}y^3 z + yx^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(0)\\ &= 3zx^2 + 4y^2 z + x^2 z\\ &= 4z(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

For å finna volumintegralet over D nyttar me sylinderkoordinatar, der D er skildra av ulikskapane

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant r \leqslant z.$$

Me får då:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS &= \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^z 4zr^2\, r\,dr\,dz\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4z\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=z} dz\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z^5\,dz\,d\theta\\ &= 2\pi\left[\frac{z^6}{6}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Om me skriv $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ har me

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z + x\sin y) - \frac{d}{dz}(2x + y^4), \frac{\partial}{\partial z}(xe^x) - \frac{\partial}{\partial x}(z + x\sin y), \frac{\partial}{\partial x}(2x + y^4) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^x)\right)\\ &= (x\cos y, -\sin y, 2).\end{aligned}$$

For å finna integralet av $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ over $\mathcal{S}$ kan me nytta Stokes' teorem, som seier at

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der kurva $\mathcal{C}$ er randa av $\mathcal{S}$ med positiv orientering. Her tyder dette at $\mathcal{C}$ er gjeven ved $z = 0$ og $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 = 4$ eller $x^2 + y^2 = 3$. Altso er kurva $\mathcal{C}$ ein sirkel med radius $\sqrt{3}$ og sentrum origo. Denne kurva kan me òg sjå på som randa av disken $\mathcal{S}'$ gjeven ved

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 3,$$

og me kan då nytta Stokes' teorem igjen og skriva

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}'} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS.$$

Her må einingsnormalvektoren $\widehat{\mathbf{N}}$ på $\mathcal{S}'$ vera $(0, 0, 1)$ for at den same orienteringa av $\mathcal{C}$ skal vera positiv for båe flatene $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$. Dermed har me

$$\iint_{\mathcal{S}'} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\mathcal{S}'} (x\cos y, -\sin y, 2)\cdot(0, 0, 1)\,dS = 2\iint_{\mathcal{S}'} dS = 6\pi,$$

der me har gjort bruk av at arealet av disken $\mathcal{S}'$ med radius $\sqrt{3}$ er 3π.