TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 18. mai 2021

Dette løsningsforslaget svarer til kombinasjonen av oppgaver eksamensoppgavene som er lagt ut.

1 Gradientene av potensialfunksjonene er som følger:

1. $\nabla\Phi_1(x,y) = (1,-1)$
2. $\nabla\Phi_2(x,y) = (y,x)$
3. $\nabla\Phi_3(x,y) = (x,y)$
4. $\nabla\Phi_4(x,y) = (-\sin\pi x, -\sin\pi y)$
5. $\nabla\Phi_5(x,y) = (-\sin\pi x, -\cos\pi y)$

Vi ser da at

- $\nabla\Phi_1(x,y)$ er konstant,
- $\nabla\Phi_2(x,y)$ er parallell med $(0,1)$ langs x-aksen og med $(1,0)$ langs y-aksen,
- $\nabla\Phi_3(x,y)$ er parallell med vektoren fra origo til (x,y),
- $\nabla\Phi_4(x,y)$ er parallell med $(1,0)$ langs x-aksen og med $(0,1)$ langs y-aksen,
- $\nabla\Phi_5(x,y)$ har y-komponent -1 langs x-aksen og er parallell med $(0,1)$ langs y-aksen.
- Det er bare vektorfeltene $\nabla\Phi_4(x,y)$ og $\nabla\Phi_5(x,y)$ som er null bortsett fra i origo.

Ut fra disse opplysningene er det opplagt hvilket vektorfelt som passer til hvilken illustrasjon.

2

- Påstand 1 er *riktig*.
  Begrunnelse: For et vektorfelt $(P(x,y), Q(x,y))$ i to variabler har vi
  $$\operatorname{curl}(P,Q) = \left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$
  Dermed er
  $$\operatorname{curl}\mathbf{F} = (0,0,0-(-2x)) = (0,0,2x) = (0,0,2x-0) = \operatorname{curl}\mathbf{G}$$
- Påstand 2 er *riktig*.
  Begrunnelse: Vi har
  $$\operatorname{div}\mathbf{F} = -2y+2, \qquad \operatorname{div}\mathbf{G} = -2x+2.$$
  Divergensteoremet i to dimensjoner gir da
  $$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,ds = \iint_D (-2y+2)\,dA, \qquad \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,ds = \iint_D (-2x+2)\,dA.$$
  Siden området D er symmetrisk når vi bytter om på koordinatene x og y er disse to dobbelt-integralene like.
- Påstand 3 er *riktig*.
  Begrunnelse: Greens teorem og påstand 1 gir at
  $$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{k} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

- Påstand 4 er *gal*.
  Begrunnelse: Hvis vi regner ut dobbeltintegralet fra påstand 2 får vi

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,ds &= \iint_D (-2y+2)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (-2y+2)\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 [-y^2+2y]_{y=0}^1\,dx = \int_0^1 (-1+2)\,dx\\ &= [x]_{x=0}^1 = 1.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Siden $f(x,y)$ er et polynom har funksjonen ingen singulære punkter. Ekstremalpunktene må derfor være enten kritiske punkter eller punkter på randen av D. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x(2-y),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y(2-y)+(x^2+y^2)(-1)\\ &= 4y-2y^2-x^2-y^2\\ &= 4y-3y^2-x^2.\end{aligned}$$

Vi ser at for å få $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ må vi ha enten $x=0$ eller $y=2$. Hvis $x=0$ får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y-3y^2 = y(4-3y)$$

som er 0 når $y=0$ eller $y=\frac{4}{3}$. Hvis $y=2$ får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8-12-x^2 = -4-x^2$$

som ikke er 0 for noen $x\in\mathbb{R}$.
De kritiske punktene til f er dermed $(0,0)$ og $(0,\frac{4}{3})$ med verdier

$$f(0,0)=0, \qquad f(0,\tfrac{4}{3}) = \frac{32}{27}.$$

Randen til D er sirkelen gitt ved $x^2+y^2=4$, som vi kan parametrisere ved $(x,y)=(2\cos t, 2\sin t)$ for $0\le t\le 2\pi$. Da får vi

$$f(2\cos t, 2\sin t) = 4(2-2\sin t).$$

Siden $-1\le \sin t\le 1$ der begge endepunktene oppnås får vi at maksimumsverdien på randen er $4(2-2\cdot(-1))=16$ som oppnås når

$$\sin t = -1 \quad\Leftrightarrow\quad t=3\pi/2 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,-2),$$

mens minimumsverdien er $4(2-2)=0$ som oppnås når

$$\sin t = 1 \quad\Leftrightarrow\quad t=\pi/2 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,2),$$

Siden $16>\frac{32}{27}$ får vi at

- minimumsverdien er 0 og oppnås i punktene $(0,0)$ og $(0,2)$,
- maksimumsverdien er 16 og oppnås i punktet $(0,-2)$.

$\boxed{4}$ Funksjonen f er *ikke* kontinuerlig. For å vise dette er det nok å sjekke at vi *ikke* alltid får samme grenseverdi for f når vi nærmer oss origo fra forskjellige retninger. På linjen $y = \lambda x$ (der $\lambda \in \mathbb{R}$ er konstant) har vi

$$f(x, \lambda x) = \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{(1 + \lambda)x^2}.$$

Hvis en funksjon $g(t)$ er deriverbar i punktet a har vi per definisjon at

$$g(a + t) = g(a) + g'(a)t + h(t),$$

der $\lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{t} = 0$; vi anvender dette på e^t (med $a = 0$) og skriver

$$e^t = 1 + t + h(t)$$

der $\lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{t} = 0$. Setter vi inn dette får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \lambda x^2 + h(\lambda x^2) - 1}{(1 + \lambda)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda + \frac{h(\lambda x^2)}{x^2}}{1 + \lambda} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Denne grenseverdien avhenger av λ og dermed er f ikke kontinuerlig.

$\boxed{5}$ Vi har

$$\nabla h(x, y) = \left(2\pi \cos\left(\frac{\pi x}{100}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{100}\right), 2\pi \sin\left(\frac{\pi x}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{100}\right)\right)$$

og

$$\begin{aligned} \nabla h(50, 25) &= \left(2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= (0, \sqrt{2}\pi). \end{aligned}$$

Terrenget er brattest i retningene som er parallelle med gradienten, altså retningene gitt ved enhetsvektorene $(0, \pm 1)$, og høyden er uendret i retningene som er ortogonale til gradienten, altså retningene gitt ved enhetsvektorene $(\pm 1, 0)$.

$\boxed{6}$ For hvert par (x, z) med $x^2 + z^2 = 1$ finnes det en unik t med $0 \le t < 2\pi$ slik at $(x, z) = (\cos t, \sin t)$; det er også et unikt punkt på skjæringskurven C med disse x- og z-koordinatene, siden y-koordinaten må være gitt ved $y = 2 - z = 2 - \sin t$. Et punkt i C er dermed gitt ved $\mathbf{r}(t)$ for en unik t med $0 \le t < 2\pi$, slik at $\mathbf{r}(t)$ er én-én-tydig bortsett fra i endepunktene av intervallet $[0, 2\pi]$. Siden $\mathbf{r}(t)$ i tillegg er en glatt funksjon betyr dette at $\mathbf{r}(t)$ er en (glatt) parametrisering av C.

For å finne krumningen bruker vi formelen

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t, -\cos t, \cos t), \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t} \\ \mathbf{r}''(t) &= (-\cos t, \sin t, -\sin t), \\ \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & -\cos t & \cos t \\ -\cos t & \sin t & -\sin t \end{vmatrix} \\ &= (\cos t \sin t - \cos t \sin t, -(\sin^2 t + \cos^t t), -\sin^2 t - \cos^2 t) \\ &= (0, 1, 1). \\ |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| &= \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi at krumningen er gitt ved

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos^2 t)^{3/2}}.$$

Vi ser da at krumningen er

- størst når
$$\cos^2 t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi/2,\ 3\pi/2,$$
altså i punktene
$$\mathbf{r}(\pi/2) = (0,1,1), \qquad \mathbf{r}(3\pi/2) = (0,3,-1),$$
- minst når
$$\cos^2 t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \pi,$$
altså i punktene
$$\mathbf{r}(0) = (1,2,0), \qquad \mathbf{r}(\pi) = (-1,2,0).$$

$\boxed{7}$ Vi har

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^z & xy + ye^z & x^2e^z + z\cos y \end{vmatrix} \\ &= (-z\sin y - ye^z, -(2xe^z - 2xe^z), y - 0) \\ &= (-z\sin y - ye^z, 0, y). \end{aligned}$$

For å finne linjeintegralet bruker vi Stokes' teorem, som gir

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

Vi parametriserer S med

$$\mathbf{s}(u,v) = (u, v, v^2)$$

for (u,v) i området D gitt ved $u^2 + v^2 \le 1$ og $v \ge 0$. Da får vi

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}\,du\,dv = (1,0,0)\times(0,1,2v)\,du\,dv = (0,-2v,1)\,du\,dv$$

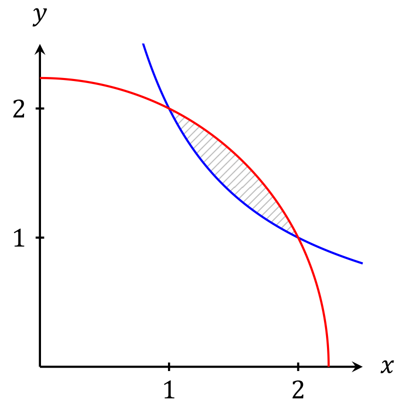
slik at

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \iint_D (-v^2\sin v - ve^{v^2}, 0, v)\cdot(0,-2v,1)\,du\,dv \\ &= \iint_D v\,du\,dv. \end{aligned}$$

For å regne ut dette integralet kan vi bruke polarkoordinater; da er D området der $r \le 1$ og $r\sin\theta \ge 0$, som tilsvarer $0 \le \theta \le \pi$. Dermed har vi

$$\iint_D v\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^\pi r\sin\theta \cdot r\,d\theta\,dr = \int_0^1 r^2[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi} dr = 2\int_0^1 r^2\,dr = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{8}$ 1) Området D er det skraverte området mellom hyperbelen $xy = 2$ (i blått) og sirkelen $x^2 + y^2 = 5$ (i rødt):



For å finne skjæringspunktene setter vi inn $x = 2/y$ i ligningen for sirkelen, og finner

$$(2/y)^2 + y^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + y^4 = 5y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y^2)^2 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Denne kvadratiske ligningen har løsninger $y^2 = 1, 4$. Siden $x \geq 0$ og $xy = 2$ må vi også ha $y \geq 0$, så de relevante løsningene for oss er $y = 1, 2$, som gir henholdsvis $x = 2, 1$. Vi kan dermed beskrive D som

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ 2/x \leq y \leq \sqrt{5 - x^2}\}.$$

Denne beskrivelsen gir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_1^2 \int_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2) Vi parametriserer $\mathcal{S}$ med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ for $-1 \leq u, v \leq 1$. Da har vi

$$\widehat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, du\, dv = (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v)\, du\, dv = (-2u, -2v, 1)\, du\, dv.$$

Hvis $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ får vi

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (-2u, -2v, 1)\, du\, dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-2uP(u, v, u^2 + v^2) - 2vQ(u, v, u^2 + v^2) \\ &\qquad + R(u, v, u^2 + v^2))\, du\, dv.\end{aligned}$$

9 Området D er avgrenset av kurvene $u = 1/4,\ v = 1,\ u = 1, v = 2$. I koordinatene u, v kan vi dermed beskrive området D som

$$\{(u, v) : 1/4 \leq u \leq 1,\ 1 \leq v \leq 2\}.$$

(Merk at vi har én-én-tydighet for koordinatene u, v siden vi antar $x, y > 0$.) For å skifte til disse variablene må vi regne ut Jacobi-determinanten. Vi har

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ y & x \end{vmatrix} = (x/y) + (x/y) = 2x/y$$

og dermed får vi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} = \frac{y}{2x},$$

som gir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_{1/4}^1 \int_1^2 f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{y(u, v)}{2x(u, v)}\, dv\, du = \int_{1/4}^1 \int_1^2 \frac{1}{2}(e^u + e^v)\, dv\, du.$$

10 Vi har

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3\cos^2 z + 3\sin^2 z + 0 = 3.$$

Hvis den lukkede flaten $\mathcal{S}$ er randen til et område $\mathcal{V}$ gir divergensteoremet at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\,\mathrm{vol}(\mathcal{V}).$$

Vi ser derfor etter et passende område $\mathcal{V}$ med $\mathrm{vol}(\mathcal{V}) = 4\pi/3$. Dette er for eksempel volumet av en kule med radius 1, så vi kan ta

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$