

Dette løsningsforslaget svarer til kombinasjonen av oppgaver som er lagt ut.

1 Gradientene av potensialfunksjonene er som følger:

1. $\nabla\phi_1(x, y) = (1, -1)$
2. $\nabla\phi_2(x, y) = (y, x)$
3. $\nabla\phi_3(x, y) = (x, y)$
4. $\nabla\phi_4(x, y) = (-\sin \pi x, -\sin \pi y)$
5. $\nabla\phi_5(x, y) = (-\sin \pi x, -\cos \pi y)$

Vi ser da at

- $\nabla\phi_1(x, y)$ er konstant,
- $\nabla\phi_2(x, y)$ er parallell med $(0, 1)$ langs x -aksen og med $(1, 0)$ langs y -aksen,
- $\nabla\phi_3(x, y)$ er parallell med vektoren fra origo til (x, y) ,
- $\nabla\phi_4(x, y)$ er parallell med $(1, 0)$ langs x -aksen og med $(0, 1)$ langs y -aksen,
- $\nabla\phi_5(x, y)$ har y -komponent -1 langs x -aksen og er parallell med $(0, 1)$ langs y -aksen.
- Det er bare vektorfeltene $\nabla\phi_4(x, y)$ og $\nabla\phi_5(x, y)$ som er null bortsett fra i origo.

Ut fra disse opplysningene er det opplagt hvilket vektorfelt som passer til hvilken illustrasjon.

2 • Påstand 1 er riktig.

Begrunnelse: For et vektorfelt $(P(x, y), Q(x, y))$ i to variabler har vi

$$\text{curl}(P, Q) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Dermed er

$$\text{curl } \mathbf{F} = (0, 0, 0 - (-2x)) = (0, 0, 2x) = (0, 0, 2x - 0) = \text{curl } \mathbf{G}$$

• Påstand 2 er riktig.

Begrunnelse: Vi har

$$\text{div } \mathbf{F} = -2y + 2, \quad \text{div } \mathbf{G} = -2x + 2.$$

Divergensteoremet i to dimensjoner gir da

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = \iint_D (-2y + 2) dA, \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = \iint_D (-2x + 2) dA.$$

Siden området D er symmetrisk når vi bytter om på koordinatene x og y er disse to dobbeltintegralene like.

• Påstand 3 er riktig.

Begrunnelse: Greens teorem og påstand 1 gir at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \iint_D \text{curl } \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- Påstand 4 er *gal*.

Begrunnelse: Hvis vi regner ut dobbeltintegralet fra påstand 2 får vi

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds &= \iint_D (-2y + 2) dA = \int_0^1 \int_0^1 (-2y + 2) dy dx \\ &= \int_0^1 [-y^2 + 2y]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 (-1 + 2) dx \\ &= [x]_{x=0}^1 = 1.\end{aligned}$$

- 3 Siden $f(x, y)$ er et polynom har funksjonen ingen singulære punkter. Ekstremalpunktene må derfor være enten kritiske punkter eller punkter på randen av D . Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x(2 - y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y(2 - y) + (x^2 + y^2)(-1) \\ &= 4y - 2y^2 - x^2 - y^2 \\ &= 4y - 3y^2 - x^2.\end{aligned}$$

Vi ser at for å få $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ må vi ha enten $x = 0$ eller $y = 2$. Hvis $x = 0$ får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3y^2 = y(4 - 3y)$$

som er 0 når $y = 0$ eller $y = \frac{4}{3}$. Hvis $y = 2$ får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 12 - x^2 = -4 - x^2$$

som ikke er 0 for noen $x \in \mathbb{R}$.

De kritiske punktene til f er dermed $(0, 0)$ og $(0, \frac{4}{3})$ med verdier

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \frac{4}{3}) = \frac{32}{27}.$$

Randen til D er sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 4$, som vi kan parametrisere ved $(x, y) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$. Da får vi

$$f(2 \cos t, 2 \sin t) = 4(2 - 2 \sin t).$$

Siden $-1 \leq \sin t \leq 1$ der begge endepunktene oppnås får vi at maksimumsverdien på randen er $4(2 - 2 \cdot (-1)) = 16$ som oppnås når

$$\sin t = -1 \iff t = 3\pi/2 \iff (x, y) = (0, -2),$$

mens minimumsverdien er $4(2 - 2) = 0$ som oppnås når

$$\sin t = 1 \iff t = \pi/2 \iff (x, y) = (0, 2),$$

Siden $16 > \frac{32}{27}$ får vi at

- minimumsverdien er 0 og oppnås i punktene $(0, 0)$ og $(0, 2)$,

- maksimumsverdien er 16 og oppnås i punktet $(0, -2)$.

4] Funksjonen f er *ikke* kontinuerlig. For å vise dette er det nok å sjekke at vi *ikke* alltid får samme grenseverdi for f når vi nærmer oss origo fra forskjellige retninger. På linjen $y = \lambda x$ (der $\lambda \in \mathbb{R}$ er konstant) har vi

$$f(x, \lambda x) = \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{(1 + \lambda^2)x^2}.$$

Hvis en funksjon $g(t)$ er deriverbar i punktet a har vi per definisjon at

$$g(a + t) = g(a) + g'(a)t + h(t),$$

der $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = 0$; vi anvender dette på e^t (med $a = 0$) og skriver

$$e^t = 1 + t + h(t)$$

der $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = 0$. Setter vi inn dette får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda x^2 + h(\lambda x^2) - 1}{(1 + \lambda^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda + \frac{h(\lambda x^2)}{x^2}}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Denne grenseverdien avhenger av λ og dermed er f ikke kontinuerlig.

5] Vi har

$$\nabla h(x, y) = \left(2\pi \cos\left(\frac{\pi x}{100}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{100}\right), 2\pi \sin\left(\frac{\pi x}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{100}\right) \right)$$

og

$$\begin{aligned} \nabla h(50, 25) &= \left(2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= (0, \sqrt{2}\pi). \end{aligned}$$

Terrenget er brattest i retningene som er parallelle med gradienten, altså retningene gitt ved enhetsvektorene $(0, \pm 1)$, og høyden er uendret i retningene som er ortogonale til gradienten, altså retningene gitt ved enhetsvektorene $(\pm 1, 0)$.

6] For hvert par (x, z) med $x^2 + z^2 = 1$ finnes det en unik t med $0 \leq t < 2\pi$ slik at $(x, z) = (\cos t, \sin t)$; det er også et unikt punkt på skjæringskurven \mathcal{C} med disse x - og z -koordinatene, siden y -koordinaten må være gitt ved $y = 2 - z = 2 - \sin t$. Et punkt i \mathcal{C} er dermed gitt ved $\mathbf{r}(t)$ for en unik t med $0 \leq t < 2\pi$, slik at $\mathbf{r}(t)$ er én-én-tydig bortsett fra i endepunktene av intervallet $[0, 2\pi]$. Siden $\mathbf{r}(t)$ i tillegg er en glatt funksjon betyr dette at $\mathbf{r}(t)$ er en (glatt) parametrisering av \mathcal{C} .

For å finne krumningen bruker vi formelen

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t, -\cos t, \cos t), \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t} \\ \mathbf{r}''(t) &= (-\cos t, \sin t, -\sin t), \\ \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & -\cos t & \cos t \\ -\cos t & \sin t & -\sin t \end{vmatrix} \\ &= (\cos t \sin t - \cos t \sin t, -(\sin^2 t + \cos^2 t), -\sin^2 t - \cos^2 t) \\ &= (0, 1, 1). \\ |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| &= \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi at krumningen er gitt ved

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Vi ser da at krumningen er

- størst når

$$\cos^2 t = 0 \iff t = \pi/2, 3\pi/2,$$

altså i punktene

$$\mathbf{r}(\pi/2) = (0, 1, 1), \quad \mathbf{r}(3\pi/2) = (0, 3, -1),$$

- minst når

$$\cos^2 t = 1 \iff t = 0, \pi,$$

altså i punktene

$$\mathbf{r}(0) = (1, 2, 0), \quad \mathbf{r}(\pi) = (-1, 2, 0).$$

7 Vi har

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^z & xy + ye^z & x^2e^z + z \cos y \end{vmatrix} \\ &= (-z \sin y - ye^z, -(2xe^z - 2xe^z), y - 0) \\ &= (-z \sin y - ye^z, 0, y). \end{aligned}$$

For å finne linjeintegralet bruker vi Stokes' teorem, som gir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS.$$

Vi parametriserer S med

$$\mathbf{s}(u, v) = (u, v, v^2)$$

for (u, v) i området D gitt ved $u^2 + v^2 \leq 1$ og $v \geq 0$. Da får vi

$$\widehat{\mathbf{N}} dS = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} du dv = (1, 0, 0) \times (0, 1, 2v) du dv = (0, -2v, 1) du dv$$

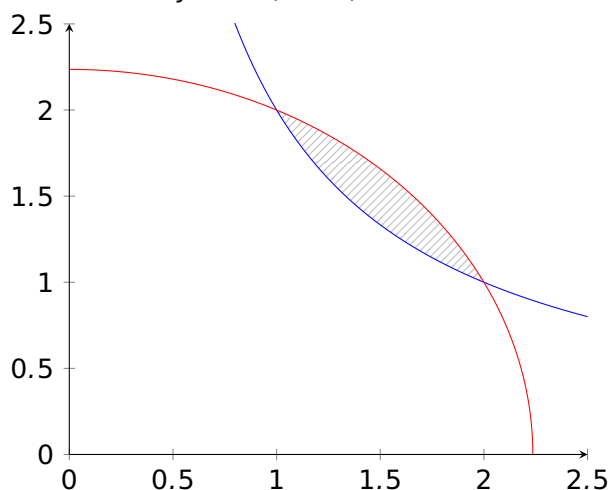
slik at

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS &= \iint_D (-v^2 \sin v - ve^{v^2}, 0, v) \cdot (0, -2v, 1) du dv \\ &= \iint_D v du dv. \end{aligned}$$

For å regne ut dette integralet kan vi bruke polarkoordinater; da er D området der $r \leq 1$ og $r \sin \theta \geq 0$, som tilsvarer $0 \leq \theta \leq \pi$. Dermed har vi

$$\iint_D v \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^\pi r \sin \theta \cdot r \, d\theta \, dr = \int_0^1 r^2 [-\cos \theta]_{\theta=0}^\pi \, dr = 2 \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{2}{3}.$$

- 8) 1) Området D er det skraverte området mellom hyperbelen $xy = 2$ (i blått) og sirkelen $x^2 + y^2 = 5$ (i rødt):



For å finne skjæringspunktene setter vi inn $x = 2/y$ i ligningen for sirkelen, og finner

$$(2/y)^2 + y^2 = 5 \iff 4 + y^4 = 5y^2 \iff (y^2)^2 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Denne kvadratiske ligningen har løsninger $y^2 = 1, 4$. Siden $x \geq 0$ og $xy = 2$ må vi også ha $y \geq 0$, så de relevante løsningene for oss er $y = 1, 2$, som gir henholdsvis $x = 2, 1$. Vi kan dermed beskrive D som

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2/x \leq y \leq \sqrt{5-x^2}\}.$$

Denne beskrivelsen gir

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_1^2 \int_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

- 2) Vi parametriserer S med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ for $-1 \leq u, v \leq 1$. Da har vi

$$\widehat{\mathbf{N}} \, dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv = (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) \, du \, dv = (-2u, -2v, 1) \, du \, dv.$$

Hvis $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ får vi

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (-2u, -2v, 1) \, du \, dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-2uP(u, v, u^2 + v^2) - 2vQ(u, v, u^2 + v^2) \\ &\quad + R(u, v, u^2 + v^2)) \, du \, dv. \end{aligned}$$

- 9 Området D er avgrenset av kurvene $u = 1/4$, $v = 1$, $u = 1$, $v = 2$. I koordinatene u, v kan vi dermed beskrive området D som

$$\{(u, v) : 1/4 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}.$$

(Merk at vi har én-én-tydighet for koordinatene u, v siden vi antar $x, y > 0$.) For å skifte til disse variablene må vi regne ut Jacobi-determinanten. Vi har

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ y & x \end{vmatrix} = (x/y) + (x/y) = 2x/y$$

og dermed får vi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \frac{y}{2x},$$

som gir

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{1/4}^1 \int_1^2 f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{y(u, v)}{2x(u, v)} dv du = \int_{1/4}^1 \int_1^2 \frac{1}{2} (e^u + e^v) dv du.$$

- 10 Vi har

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3 \cos^2 z + 3 \sin^2 z + 0 = 3.$$

Hvis den lukkede flaten S er randen til et område \mathcal{V} gir divergensteoremet at

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 3 \operatorname{vol}(\mathcal{V}).$$

Vi ser derfor etter et passende område \mathcal{V} med $\operatorname{vol}(\mathcal{V}) = 4\pi/3$. Dette er for eksempel volumet av en kule med radius 1, så vi kan ta

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$