NTNU

Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 19. august 2021

Dette løsningsforslaget svarer til kombinasjonen av oppgaver som er lagt ut.

$\boxed{1}$ Setter vi inn ligningene for planene i ligningen for kjeglen, får vi følgende:

1. $x^2 = (2y)^2 + 1$, eller $x^2 - (2y)^2 = 1$, som gir en hyperbel.
2. $x^2 = 4 + z^2$, eller $x^2 - z^2 = 4$, som også gir en hyperbel.
3. $(2y)^2 + z^2 = 4$, som gir en ellipse.
4. Her kan vi rotere koordinataksene i xy-planet slik at linjen $x = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}y$ er parallell med en av aksene. Det gjør vi ved å bytte til koordinatene $u = \sqrt{\frac{2}{5}}x + \sqrt{\frac{3}{5}}y$ og $v = \sqrt{\frac{3}{5}}x - \sqrt{\frac{2}{5}}y$, slik at linjen er gitt ved $u = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Omvendt har vi at

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}}u + \sqrt{\frac{3}{5}}v = \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}v, \qquad y = \sqrt{\frac{3}{5}}u - \sqrt{\frac{2}{5}}v = \frac{2\sqrt{6}}{5} - \sqrt{\frac{2}{5}}v.$$

   Setter vi dette inn i ligningen for kjeglen, får vi

$$\begin{aligned} x^2 &= (2y)^2 + z^2 \\ \left(\frac{4}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}v\right)^2 &= 4\left(\frac{2\sqrt{6}}{5} - \sqrt{\frac{2}{5}}v\right)^2 + z^2 \\ \frac{16}{25} + \frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}v + \frac{3}{5}v^2 &= 4\left(\frac{24}{25} - \frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}v + \frac{2}{5}v^2\right) + z^2 \\ \frac{-16}{5} + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{5}}v - v^2 &= z^2 \\ -\left(v - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{32}{5} &= z^2 \\ z^2 + \left(v - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

   Dette er ligningen for en sirkel i vz-planet.
5. Her kan vi rotere koordinataksene i xy-planet slik at linjen $x = 2 - 2y$ er parallell med en av aksene. Det gjør vi ved å bytte til koordinatene $u = \sqrt{\frac{1}{5}}x + \sqrt{\frac{4}{5}}y$ og $v = \sqrt{\frac{4}{5}}x - \sqrt{\frac{1}{5}}y$, slik at linjen er gitt ved $u = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Omvendt har vi at

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}}u + \sqrt{\frac{4}{5}}v = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{4}{5}}v, \qquad y = \sqrt{\frac{4}{5}}u - \sqrt{\frac{1}{5}}v = \frac{4}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}}v.$$

Setter vi dette inn i ligningen for kjeglen, får vi

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (2y)^2 + z^2 \\
\left(\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{4}{5}v}\right)^2 &= 4\left(\frac{4}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}v}\right)^2 + z^2 \\
\frac{4}{25} + \frac{8}{5\sqrt{5}}v + \frac{4}{5}v^2 &= \frac{64}{25} - \frac{32}{5\sqrt{5}}v + \frac{4}{5}v^2 + z^2 \\
v &= \frac{15\sqrt{5}}{50} + \frac{\sqrt{5}}{8}z^2.
\end{aligned}
$$

Dette er ligningen for en parabel i vz-planet.

For å skille de to hyperblene kan vi observere at i (1) må $|x|$ være minst 1, mens i (2) må vi ha $|x| \geq 2$.

$\boxed{2}$

- Påstand 1 er *sann*.
  Begrunnelse: I polarkoordinater får vi
  $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta,$$
  slik at $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = f(0,0)$.
- Påstand 2 er *sann*.
  Begrunnelse: For $(x,y) \neq (0,0)$ har vi
  $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
  mens
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$
- Påstand 3 er *usann*.
  Begrunnelse: I polarkoordinater har vi for $r \neq 0$
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\sin^3\theta}{r^3} = \sin^3\theta,$$
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^3} = \cos^3\theta.$$
  Dermed eksisterer grensene når r går mot 0 ikke, siden verdiene er avhengige av hvilken vinkel θ vi nærmer oss origo langs.
- Påstand 4 er *usann*.
  Begrunnelse: Hvis f er deriverbar i origo, eksisterer grenseverdien
  $$\lim_{r\to 0}\frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\cos\theta\sin\theta.$$
  Men denne grensen eksisterer ikke, siden verdien er avhengig av hvilken vinkel θ vi nærmer oss origo langs.

$\boxed{3}$ Vi kan parametrisere sylinderen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ som

$$x = \cos\theta, \quad y = 1 + \sin\theta, \quad z = z$$

der $0 \leq \theta < 2\pi$. Ligningen $z = x^2 + 2y^2$ gir da

$$z = cos^2\theta + 2(1+\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2 + 4\sin\theta + 2\sin^2\theta = 3 + 4\sin\theta + 2\sin^2\theta,$$

slik at skjæringskurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, 1 + \sin\theta, 3 + 4\sin\theta + 2\sin^2\theta) \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$

Deriverer vi dette, får vi

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 4\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta).$$

Punktet $(-1, 1, 3)$ svarer til θ der $\cos\theta = -1$ og $\sin\theta = 0$, som gir $\theta = \pi$. Da har vi

$$\mathbf{r}'(\pi) = (0, -1, -4), \qquad |\mathbf{r}'(\pi)| = \sqrt{17}, \qquad \widehat{\mathbf{T}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{17}}, \frac{-4}{\sqrt{17}}\right).$$

$\boxed{4}$ Vi bruker Lagranges multiplikatormetode. La $g(x, y, z) = x^2 + y^6 + z^4$; da ønsker vi å løse ligningssystemet

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g(x, y, z) = 1.$$

Vi har

$$\nabla f = (4x, 18y^5, 16z^3), \qquad \nabla g = (2x, 6y^5, 4z^3),$$

slik at vi har ligningene

$$4x = 2\lambda x, \qquad 18y^5 = 6\lambda y^5, \qquad 16z^3 = 4\lambda z^3.$$

Her ser vi at vi må ha

- $\lambda = 2$ eller $x = 0$,
- $\lambda = 3$ eller $y = 0$,
- $\lambda = 4$ eller $z = 0$.

Det er bare tre kompatible alternativer; sammen med den siste ligningen $x^2 + y^6 + z^4 = 1$ får vi løsningene

- $\lambda = 2$ og $y = z = 0$, $x^2 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$
- $\lambda = 3$ og $x = z = 0$, $y^6 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$,
- $\lambda = 4$ og $x = y = 0$, $z^4 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$.

Siden $x^2 + y^6 + z^4 = 1$ er en lukket flate vet vi at den største og minste verdien av f må oppnås på ett av disse 6 kritiske punktene. Vi evaluerer:

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2, \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3, \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4.$$

Dermed er den minste verdien 2 og den største verdien 4.

$\boxed{5}$ Fra $\mathbf{F} = \nabla\phi$ får vi ligningene

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xz,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = ze^{z\sin y}\cos y,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = e^{z\sin y}\sin y + x^2,$$

Fra ligningen for $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ser vi at

$$\phi(x, y, z) = x^2 z + \psi(y, z).$$

Setter vi dette inn i ligningen for $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ har vi

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = ze^{z\sin y}\cos y,$$

slik at

$$\psi(y,z) = e^{z\sin y} + \kappa(z), \qquad \phi(x,y,z) = x^2 z + e^{z\sin y} + \kappa(z).$$

Fra ligningen for $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ får vi da

$$x^2 + e^{z\sin y}\sin y + \kappa'(z) = e^{z\sin y}\sin y + x^2,$$

slik at $\kappa'(z) = 0$, som gir at $\kappa(z)$ må være konstant. Vi ser da at

$$\phi(x,y,z) = x^2 z + e^{z\sin y}$$

er en potensialfunksjon (og at alle andre potensialfunksjoner avviker fra denne med en konstant). Siden $\mathbf{F}$ er konservativt med potensialfunskjon ϕ, vet vi at linjeintegralet langs kurven C er gitt ved

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \phi(\mathbf{r}(2\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0))\\ &= \phi(2,2\pi,2\pi) - \phi(2,0,0)\\ &= 8\pi + e^{2\pi\sin(2\pi)} - 0 - e^0\\ &= 8\pi - 1.\end{aligned}$$

6 La D være området avgrenset av C og x-aksen; arealet vi ønsker å finne er da gitt ved dobbeltintegralet $\iint_D 1\,dA$. I polarkoordinater kan vi beskrive D som punktene (r,θ) der $0 \le \theta \le \pi$ og $0 \le r \le e^\theta$. Vi kan da bytte til polarkoordinater og skrive dobbeltintegralet som

$$\begin{aligned}\iint_D 1\,dA &= \int_0^\pi \int_0^{e^\theta} r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=e^\theta} d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{4}.\end{aligned}$$

Randen av området D (positivt orientert) består av kurven C og kurven C' som går langs x-aksen fra $x = -e^\pi$ (når $r = e^\pi, \theta = \pi$) til $x = 1$ (når $r = e^0, \theta = 0$). Greens teorem gir da

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial(2x+\cos y)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dA = \iint_D 1\,dA = \frac{e^{2\pi}-1}{4}.$$

Vi kan dermed finne verdien av integralet langs C ved å regne ut linjeintegralet langs C'. Vi parametriserer C' som $\mathbf{r}(t) = (t,0)$ for $-e^\pi \le t \le 1$, som gir $d\mathbf{r} = (1,0)\,dt$, slik at

$$\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-e^\pi}^1 \mathbf{F}(t,0)\cdot(1,0)dt = \int_{-e^\pi}^1 (0,2t)\cdot(1,0)dt = 0.$$

Vi får dermed at

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{e^{2\pi}-1}{4}.$$

7 La S være den begrensede flaten vi ser på. Ved å bruke polarkoordinater i (y,z)-planet kan vi parametrisere denne som

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r^2, r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Da har vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (2r, \cos\theta, \sin\theta), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (0, -r\sin\theta, r\cos\theta),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r, -2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta),$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2 + 4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta} = r\sqrt{1+4r^2},$$

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| d\theta\, dr = r\sqrt{1+4r^2}\, d\theta\, dr.$$

Arealet av $\mathcal{S}$ er da gitt ved

$$\iint_{\mathcal{S}} 1\, dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\, d\theta\, dr = 2\pi \int_1^2 r\sqrt{1+4r^2}\, dr.$$

For å regne ut dette bytter vi til variabelen $u = 1 + 4r^2$; da er $du = 8r\, dr$ og endepunktene $r = 1, 2$ svarer til $u = 5, 17$, slik at

$$\int_1^2 r\sqrt{1+4r^2}\, dr = \frac{1}{8}\int_5^{17} u^{1/2}\, du = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{u=5}^{u=17} = \frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{12}.$$

Arealet av $\mathcal{S}$ er altså

$$\frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{6}\pi.$$

$\boxed{8}$ Curlen av $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & 2yz - \cos x & y^2 + y + e^z \end{vmatrix} \\ &= ((2y+1) - 2y, -(0 - ye^{yz}), \sin x - ze^{yz}) \\ &= (1, ye^{yz}, \sin x - ze^{yz}).\end{aligned}$$

Kurven $\mathcal{C}$ er en sirkel i planet $x = 1$. La $\mathcal{S}$ være sirkelskiven avgrenset av $\mathcal{C}$. Da er $\mathcal{C}$ positivt orientert som randen av $\mathcal{S}$ og Stokes' teorem gir

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Vi kan parametrisere $\mathcal{S}$ med polarkoordinater som

$$\mathbf{s}(r,\theta) = (1, r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Da får vi

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = (0, \cos\theta, \sin\theta), \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (0, -r\sin\theta, r\cos\theta),$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (r, 0, 0),$$

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = (r, 0, 0)\, d\theta\, dr,$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (r, 0, 0)\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r\, dr \\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

For at dette skal være 4π må vi dermed velge $R = 2$.

$\boxed{9}$ Området vi integrerer over i xy-planet er avgrenset av linjene $y = 0$ og $y = x \tan T$ og sirkelen $x^2+y^2 = 1$, mens i z-retningen er vi avgrenset av $z = 0$ og sfæren $x^2+y^2+z^2 = 1$. I kulekoordinater kan vi beskrive dette området ved ulikhetene

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \qquad 0 \leq \theta \leq T,$$

slik at vi kan skrive trippelintegralet i kulekoordinater som

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^T f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\, r^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho.$$

$\boxed{10}$ Punktet med sylinderkoordinater $(r, \theta, z) = (\sqrt{2}, \pi/4, 1)$ har kartesiske koordinater

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \qquad y = r\sin\theta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \qquad z = 1,$$

som er punktet der vi kjenner verdien av ∇f. Kjederegelen gir da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0 \\
&= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$