

Dette løsningsforslaget svarer til kombinasjonen av oppgaver som er lagt ut.

1] Setter vi inn ligningene for planene i ligningen for kjeglen, får vi følgende:

1. $x^2 = (2y)^2 + 1$, eller $x^2 - (2y)^2 = 1$, som gir en hyperbel.
2. $x^2 = 4 + z^2$, eller $x^2 - z^2 = 4$, som også gir en hyperbel.
3. $(2y)^2 + z^2 = 4$, som gir en ellipse.
4. Her kan vi rotere koordinataksene i xy -planet slik at linjen $x = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}y$ er parallell med en av aksene. Det gjør vi ved å bytte til koordinatene $u = \sqrt{\frac{2}{5}}x + \sqrt{\frac{3}{5}}y$ og $v = \sqrt{\frac{3}{5}}x - \sqrt{\frac{2}{5}}y$, slik at linjen er gitt ved $u = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Omvendt har vi at

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}}u + \sqrt{\frac{3}{5}}v = \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}v, \quad y = \sqrt{\frac{3}{5}}u - \sqrt{\frac{2}{5}}v = \frac{2\sqrt{6}}{5} - \sqrt{\frac{2}{5}}v.$$

Setter vi dette inn i ligningen for kjeglen, får vi

$$\begin{aligned} x^2 &= (2y)^2 + z^2 \\ \left(\frac{4}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}v\right)^2 &= 4\left(\frac{2\sqrt{6}}{5} - \sqrt{\frac{2}{5}}v\right)^2 + z^2 \\ \frac{16}{25} + \frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}v + \frac{3}{5}v^2 &= 4\left(\frac{24}{25} - \frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}v + \frac{2}{5}v^2\right) + z^2 \\ \frac{-16}{5} + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{5}}v - v^2 &= z^2 \\ -\left(v - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{32}{5} &= z^2 \\ z^2 + \left(v - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

Dette er ligningen for en sirkel i vz -planet.

5. Her kan vi rotere koordinataksene i xy -planet slik at linjen $x = 2 - 2y$ er parallell med en av aksene. Det gjør vi ved å bytte til koordinatene $u = \sqrt{\frac{1}{5}}x + \sqrt{\frac{4}{5}}y$ og $v = \sqrt{\frac{4}{5}}x - \sqrt{\frac{1}{5}}y$, slik at linjen er gitt ved $u = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Omvendt har vi at

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}}u + \sqrt{\frac{4}{5}}v = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{4}{5}}v, \quad y = \sqrt{\frac{4}{5}}u - \sqrt{\frac{1}{5}}v = \frac{4}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}}v.$$

Setter vi dette inn i ligningen for kjeglen, får vi

$$\begin{aligned}x^2 &= (2y)^2 + z^2 \\ \left(\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{4}{5}v}\right)^2 &= 4\left(\frac{4}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}v}\right)^2 + z^2 \\ \frac{4}{25} + \frac{8}{5\sqrt{5}}v + \frac{4}{5}v^2 &= \frac{64}{25} - \frac{32}{5\sqrt{5}}v + \frac{4}{5}v^2 + z^2 \\ v &= \frac{15\sqrt{5}}{50} + \frac{\sqrt{5}}{8}z^2.\end{aligned}$$

Dette er ligningen for en parabel i vz -planet.

For å skille de to hyperblene kan vi observere at i (1) må $|x|$ være minst 1, mens i (2) må vi ha $|x| \geq 2$.

2

- Påstand 1 er *sann*.

Begrunnelse: I polarkoordinater får vi

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = r \cos \theta \sin \theta,$$

slik at $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0 = f(0, 0)$.

- Påstand 2 er *sann*.

Begrunnelse: For $(x, y) \neq (0, 0)$ har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

mens

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

- Påstand 3 er *usann*.

Begrunnelse: I polarkoordinater har vi for $r \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r^3} = \sin^3 \theta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^3} = \cos^3 \theta.$$

Dermed eksisterer grensene når r går mot 0 ikke, siden verdiene er avhengige av hvilken vinkel θ vi nærmer oss origo langs.

- Påstand 4 er *usann*.

Begrunnelse: Hvis f er deriverbar i origo, eksisterer grenseverdien

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta.$$

Men denne grensen eksisterer ikke, siden verdien er avhengig av hvilken vinkel θ vi nærmer oss origo langs.

3

Vi kan parametrisere sylinderen $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ som

$$x = \cos \theta, \quad y = 1 + \sin \theta, \quad z = z$$

der $0 \leq \theta < 2\pi$. Ligningen $z = x^2 + 2y^2$ gir da

$$z = \cos^2 \theta + 2(1 + \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2 + 4 \sin \theta + 2 \sin^2 \theta = 3 + 4 \sin \theta + \sin^2 \theta,$$

slik at skjæringskurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, 1 + \sin \theta, 3 + 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

Deriverer vi dette, får vi

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 4 \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta).$$

Punktet $(-1, 1, 3)$ svarer til θ der $\cos \theta = -1$ og $\sin \theta = 0$, som gir $\theta = \pi$. Da har vi

$$\mathbf{r}'(\pi) = (0, -1, -4), \quad |\mathbf{r}'(\pi)| = \sqrt{17}, \quad \widehat{\mathbf{T}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{17}}, \frac{-4}{\sqrt{17}}\right).$$

4 Vi bruker Lagranges multiplikator metode. La $g(x, y, z) = x^2 + y^6 + z^4$; da ønsker vi å løse lignings-systemet

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y, z) = 1.$$

Vi har

$$\nabla f = (4x, 18y^5, 16z^3), \quad \nabla g = (2x, 6y^5, 4z^3),$$

slik at vi har ligningene

$$4x = 2\lambda x, \quad 18y^5 = 6\lambda y^5, \quad 16z^3 = 4\lambda z^3.$$

Her ser vi at vi må ha

- $\lambda = 2$ eller $x = 0$,
- $\lambda = 3$ eller $y = 0$,
- $\lambda = 4$ eller $z = 0$.

Det er bare tre kompatible alternativer; sammen med den siste ligningen $x^2 + y^6 + z^4 = 1$ får vi løsningene

- $\lambda = 2$ og $y = z = 0$, $x^2 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$
- $\lambda = 3$ og $x = z = 0$, $y^6 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$,
- $\lambda = 4$ og $x = y = 0$, $z^4 = 1$, det vil si $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$.

Siden $x^2 + y^6 + z^4 = 1$ er en lukket flate vet vi at den største og minste verdien av f må oppnås på ett av disse 6 kritiske punktene. Vi evaluerer:

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2, \quad f(0, \pm 1, 0) = 3, \quad f(0, 0, \pm 1) = 4.$$

Dermed er den minste verdien 2 og den største verdien 4.

5 Fra $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2xz, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= ze^{z \sin y} \cos y, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= e^{z \sin y} \sin y + x^2, \end{aligned}$$

Fra ligningen for $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ser vi at

$$\varphi(x, y, z) = x^2 z + \psi(y, z).$$

Setter vi dette inn i ligningen for $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ har vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = ze^{z \sin y} \cos y,$$

slik at

$$\psi(y, z) = e^{z \sin y} + \kappa(z), \quad \varphi(x, y, z) = x^2 z + e^{z \sin y} + \kappa(z).$$

Fra ligningen for $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ får vi da

$$x^2 + e^{z \sin y} \sin y + \kappa'(z) = e^{z \sin y} \sin y + x^2,$$

slik at $\kappa'(z) = 0$, som gir at $\kappa(z)$ må være konstant. Vi ser da at

$$\varphi(x, y, z) = x^2 z + e^{z \sin y}$$

er en potensialfunksjon (og at alle andre potensialfunksjoner avviker fra denne med en konstant).

Siden \mathbf{F} er konservativt med potensialfunksjon φ , vet vi at linjeintegralet langs kurven \mathcal{C} er gitt ved

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) \\ &= \varphi(2, 2\pi, 2\pi) - \varphi(2, 0, 0) \\ &= 8\pi + e^{2\pi \sin(2\pi)} - 0 - e^0 \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

- 6 La D være området avgrenset av \mathcal{C} og x -aksen; arealet vi ønsker å finne er da gitt ved dobbelt-integralet $\iint_D 1 \, dA$. I polarkoordinater kan vi beskrive D som punktene (r, θ) der $0 \leq \theta \leq \pi$ og $0 \leq r \leq e^\theta$. Vi kan da bytte til polarkoordinater og skrive dobbeltintegralet som

$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, dA &= \int_0^\pi \int_0^{e^\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=e^\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2\theta} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2\theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Randen av området D (positivt orientert) består av kurven \mathcal{C} og kurven \mathcal{C}' som går langs x -aksen fra $x = -e^\pi$ (når $r = e^\pi, \theta = \pi$) til $x = 1$ (når $r = e^0, \theta = 0$). Greens teorem gir da

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial(2x + \cos y)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) dA = \iint_D 1 \, dA = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}.$$

Vi kan dermed finne verdien av integralet langs \mathcal{C} ved å regne ut linjeintegralet langs \mathcal{C}' . Vi parametriserer \mathcal{C}' som $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$ for $-e^\pi \leq t \leq 1$, som gir $d\mathbf{r} = (1, 0) \, dt$, slik at

$$\int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-e^\pi}^1 \mathbf{F}(t, 0) \cdot (1, 0) \, dt = \int_{-e^\pi}^1 (0, 2t) \cdot (1, 0) \, dt = 0.$$

Vi får dermed at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}.$$

- 7 La \mathcal{S} være den begrensede flaten vi ser på. Ved å bruke polarkoordinater i (y, z) -planet kan vi parametrisere denne som

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r^2, r \cos \theta, r \sin \theta), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Da har vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= (2r, \cos \theta, \sin \theta), & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (0, -r \sin \theta, r \cos \theta), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (r, -2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta), \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| &= \sqrt{r^2 + 4r^4 \cos^2 \theta + 4r^4 \sin^2 \theta} = r\sqrt{1 + 4r^2}, \\ dS &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| d\theta dr = r\sqrt{1 + 4r^2} d\theta dr.\end{aligned}$$

Arealet av S er da gitt ved

$$\iint_S 1 dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 4r^2} d\theta dr = 2\pi \int_1^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr.$$

For å regne ut dette bytter vi til variabelen $u = 1 + 4r^2$; da er $du = 8r dr$ og endepunktene $r = 1, 2$ svarer til $u = 5, 17$, slik at

$$\int_1^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{1}{8} \int_5^{17} u^{1/2} du = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u=5}^{u=17} = \frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{12}.$$

Arealet av S er altså

$$\frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{6} \pi.$$

8 Curlen av \mathbf{F} er gitt ved

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & 2yz - \cos x & y^2 + y + e^z \end{vmatrix} \\ &= ((2y + 1) - 2y, -(0 - ye^{yz}), \sin x - ze^{yz}) \\ &= (1, ye^{yz}, \sin x - ze^{yz}).\end{aligned}$$

Kurven C er en sirkel i planet $x = 1$. La S være sirkelskiven avgrenset av C . Da er C positivt orientert som randen av S og Stokes' teorem gir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS.$$

Vi kan parametrisere S med polarkoordinater som

$$\mathbf{s}(r, \theta) = (1, r \cos \theta, r \sin \theta), \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Da får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} &= (0, \cos \theta, \sin \theta), & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= (0, -r \sin \theta, r \cos \theta), \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= (r, 0, 0), \\ \widehat{\mathbf{N}} dS &= (r, 0, 0) d\theta dr, \\ \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (r, 0, 0) d\theta dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^R r dr \\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

For at dette skal være 4π må vi dermed velge $R = 2$.

- 9 Området vi integrerer over i xy -planet er avgrenset av linjene $y = 0$ og $y = x \tan T$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, mens i z -retningen er vi avgrenset av $z = 0$ og sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. I kulekoordinater kan vi beskrive dette området ved ulikhetene

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq T,$$

slik at vi kan skrive trippelintegralet i kulekoordinater som

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^T f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho.$$

- 10 Punktet med sylinderkoordinater $(r, \theta, z) = (\sqrt{2}, \pi/4, 1)$ har kartesiske koordinater

$$x = r \cos \theta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \quad y = r \sin \theta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \quad z = 1,$$

som er punktet der vi kjenner verdien av ∇f . Kjederegelen gir da

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0 \\ &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$