Oppgave 1 Alternativ (iii) er *ikke* et uttrykk for volumet av T. Dette alternativet gir volumet av et legeme som ligger mellom flatene $z = 0$ og $z = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, og som ellers er avgrenset av $x = 0$, $y = 1$ og $y = \sqrt{x}$, altså ikke slik T er beskrevet.

Alternativene (i) og (iv) uttrykker det samme, bare integrasjonsrekkefølgen i x- og y-retning er byttet om. Alternativ (i) fås fra (ii) ved å substituere x i (ii) med $\frac{\pi}{2}x$. Alternativ (v) framkommer ved å ta integralet over hele rektanglet $[0, 1] \times [0, 1]$, som gir $\frac{2}{\pi}$, og så trekke fra integralet over området som er avgrenset av $x = 0$, $y = 1$ og $y = x^2$. Direkte utregning av alle integralene som gir samme verdi, gir at volumet til T er lik $8(\pi - 2)/\pi^3$.

Oppgave 2 Påstand (ii) er *ikke* sann.

Direkte utregning gir at div $\mathbf{F} = 0$ og div $\mathbf{G} = 2$. Divergensteoremet i planet gir da at $\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = 0$, mens $\oint_C \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = 2 \iint_D dA = 2 \cdot (\text{Arealet av } D) = \pi$. Dette viser også at påstand (v) er sann. Direkte utregning gir curl $\mathbf{F}$ = curl $\mathbf{G} = 2\mathbf{k}$, så (iii) er sann, og ut fra Greens teorem er da også (iv) sann. Utregning ved Greens teorem gir $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_D dA = 2 \cdot (\text{Arealet av } D) = \pi$, så (i) er sann.

Oppgave 3

(i) $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon E.

(ii) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon B.

(iii) $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon D.

(iv) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon C.

(v) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon A.

En måte å se denne sammenhengen på er å se på fortegnet til vektorfeltenes komponenter. La $\mathbf{F}(x, y)$ være gitt som $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$. Da kan man tenke seg fire tilfeller: (1) Både F_1 og $F_2 > 0$: Da vil vektorpilene peke oppover og til høyre. (2) Både F_1 og $F_2 < 0$: Da vil vektorpilene peke nedover og til venstre. (3) $F_1 > 0$ og $F_2 < 0$: Da vil vektorpilene peke nedover og til høyre. (4) $F_1 < 0$ og $F_2 > 0$: Da vil vektorpilene peke oppover og til venstre. I tillegg kommer at i hvert av tilfellene kan F_1 eller F_2 være lik 0. Det gir vektorpiler som er henholdsvis vertikale og horisontale.

Ved å bruke dette får vi at $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (1) i første kvadrant, (4) i andre kvadrant, (3) i tredje kvadrant og (2) i fjerde kvadrant. Det passer med illustrasjon E. $\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ svarer til (1) i hele planet, noe som passer med illustrasjon B. Det er den eneste illustrasjonen der alle pilene peker oppover og til høyre. $\mathbf{F}(x,y) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (1) i første og fjerde kvadrant, (2) i andre og tredje kvadrant. Her kan vi også legge merke til at $F_2/F_1 = 1/2$, så alle vektorpilene er parallelle. Dette finner vi kun i illustrasjon D. $\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ svarer til (1) når $-x < y < x$, (2) når $x < y < -x$, (3) når $-y < x < y$ og (4) når $y < x < -y$. Her blir altså planet oppdelt i fire områder avgrenset av linjene $y = x$ og $y = -x$. $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (3) i første kvadrant, (2) i andre kvadrant, (4) i tredje kvadrant og (1) i fjerde kvadrant.

Oppgave 4 La $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} = x\mathbf{j}$. Da blir $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. La D betegne området innenfor ellipsen og la C betegne randa til D, altså selve ellipsekurven. Ved Greens teorem får vi da

$$A = \iint_D dxdy = \oint_C xdy = \int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Oppgave 5 Utregning av gradienten gir

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3y}}, \frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}}\right)_{(x,y)=(1,1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Tangenten til $y = x^2$ i punktet $(1,1)$ kan uttrykkes som $y = 2x-1$, så $\mathbf{u}$ har samme retning som vektoren $(1,2)$. Siden $\mathbf{u}$ skal være en enhetsvektor får vi $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. Videre får vi

$$D_{\mathbf{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\cdot(1,2) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Oppgave 6 Ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen får vi

$$I = \int_{-3}^{2}\int_{y^2}^{6-y} f(x,y)dxdy.$$

Verdien til I kan tolkes som volumet av et legeme som er avgrenset av flatene $z = 0$, $z = f(x,y)$, og videre av $x = y^2$ og $x = 6-y$.

Oppgave 7 Utregning gir

$$\mathbf{r}'(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$$

Dermed er $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}t$ og enhetstangentvektor blir $\widehat{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos t, \sin t, 2)$. Utregnet i punktet gitt ved $t = \pi/2$ får vi $\widehat{\mathbf{T}}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$. Lengden L av $\mathcal{C}$ blir

$$L = \int_0^\pi |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{5}\int_0^\pi t\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2.$$

Oppgave 8 Utregning gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} - 2\right) \quad \text{og}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}. \tag{1}$$

Merk at de partielle deriverte ikke er definert i punktet $(2, 1)$, så dette er et singulært punkt, og dermed ikke et kritisk punkt. I det videre antar vi at $(x, y) \neq (2, 1)$. Vi får at $\partial f/\partial x = 0$ når $x = 2$ og når $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{1}{2}$ og $\partial f/\partial y = 0$ når $y = 1$. Kritiske punkter (begge de partielle deriverte lik 0) får vi da når $(x-2)^2 = \frac{1}{4}$ og $y = 1$, dvs. i punktene $(\frac{5}{2}, 1)$ og $(\frac{3}{2}, 1)$. Utregning gir $f(\frac{5}{2}, 1) = f(\frac{3}{2}, 1) = \frac{17}{4}$. For å bestemme maksimums- og minimumsverdier må vi ta hensyn både til de kritiske punktene og til det singulære punktet. I tillegg må vi undersøke randa til D. På randa til D er $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, så her kan $f(x, y)$ skrives $f(x, y) = 1 + 4x - x^2 := g(x)$. $g(x)$ har sin største verdi når $x = 2$ og sin minste verdi når $x = 1$ eller $x = 3$. Dermed får vi at største verdi på randa blir $f(2, 2) = f(2, 0) = 5$, og at minste verdi blir $f(1, 1) = f(3, 1) = 4$. Utregning av f i det singulære punktet gir $f(2, 1) = 4$.

Ved å sammenligne funksjonsverdiene vi har fått i alle de aktuelle punktene får vi:

- Den absolutte maksimumsverdien for f i D er 5 og den antas i punktene $(2, 2)$ og $(2, 0)$.
- Den absolutte minimumsverdien for f i D er 4 og den antas i punktene $(1, 1)$, $(3, 1)$ og $(2, 1)$.

Oppgave 9 $\mathcal{S}$ kan parametriseres ved $z = f(x, y) = 4 - x^2$. Enhetsnormalvektoren til $\mathcal{S}$ med positiv z-komponent kan da uttrykkes som

$$\widehat{\mathbf{N}} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{(2x, 0, 1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Med $dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dxdy$ får vi da $\widehat{\mathbf{N}}dS = (2x, 0, 1)dxdy$

Dette gir

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS &= \iint_D (x, y, 4 - x^2) \cdot (2x, 0, 1)\, dxdy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (4 + x^2)\, dydx = \int_0^2 (16 - x^4)\, dx = \frac{128}{5}.\end{aligned}$$

Her er D området i xy-planet som er avgrenset av x-aksen, y-aksen og kurven $y = 4 - x^2$.

Oppgave 10 Kurven $\mathcal{C}$ ligger i planet $x - 2y + z + 2 = 0$ og skal ha positiv orientering mot klokka sett ovenfra. Planet kan skrives $z = -x + 2y - 2$ så en enhetsnormalvektor for planet vil da være $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Orienteringen til $\mathcal{C}$ gir at $\widehat{\mathbf{N}}$ må ha positiv z-komponent, så vi velger $\widehat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Dermed blir $\widehat{\mathbf{N}}dS = (1, -2, 1)dxdy$ (se også løsning på oppgave 9). Direkte utregning gir $\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = (-z, -1, 6y)$. Projeksjonen av $\mathcal{C}$ ned i xy-planet blir sirkelen $x^2 + y^2 = 9$.

Ved å bruke Stokes' teorem får vi nå (her er $\mathcal{S}$ den delen av det angitte planet som har $\mathcal{C}$ som rand, og D er sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 9$).

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D (x - 2y + 2, -1, 6y) \cdot (1, -2, 1)dxdy \\ &= \iint_D (x + 4y + 4)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r\cos\theta + 4r\sin\theta + 4)rdrd\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + 36\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + 18\int_0^{2\pi} d\theta = 36\pi.\end{aligned}$$