Oppgave 1 Alternativ (iii) uttrykker tangentplanet til den angitte flata i punktet $(1,-1,2)$. Alle planene inneholder punktet $(1,-1,2)$, men bare alternativ (iii) har riktig normalvektor, $(5,-2,4)$.

Oppgave 2 Funksjonen gitt ved uttrykk (iv) kan gjøres kontinuerlig i $(0,0)$ ved å definere $f(0,0) = 1$. Dette følger av at $\lim_{t\to 1} \frac{\sin t}{t} = 1$. For alle de andre funksjonene er det mulig å finne ulike veier inn til origo som gir ulik grenseverdi, eller at grenseverdien ikke eksisterer for noe veivalg.

Oppgave 3

(i) $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ svarer til illustrasjon A.

(ii) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ svarer til illustrasjon B.

(iii) $f(x,y) = 2y^2 - x^2$ svarer til illustrasjon C.

(iv) $f(x,y) = 2x^2 - y^2$ svarer til illustrasjon D.

(v) $f(x,y) = y^2 - x^2$ svarer til illustrasjon E.

En måte å se sammenhengen på kan være å se etter skjæringspunkter mellom nivåkurvene og koordinataksene og å se på asymptotene til nivåkurvene.

Oppgave 4 Massen finnes ved å regne ut dobbeltintegralet av tetthetsfunksjonen over området D. Det vil gi enklest regning å danne et iterert integral der vi integrerer i x-retningen først. Da får vi

$$M = \iint_D (1+y)dA = \int_0^2 \int_{-y^2}^{4-y^2} (1+y)dxdy = 4\int_0^2 (1+y)dy = 16.$$

Oppgave 5 Partiell derivasjon av uttrykket $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

De kritiske punktene får vi når begge disse partielle deriverte er lik 0. Altså vi får punktene $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Utregning av andre ordens partielle deriverte gir

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy(3-2x^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xy(3-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

og

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Andrederiverttesten brukt på uttrykket $AB - C^2$ gir da at $(0,0)$ er et salpunkt, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ er lokale max-punkter, og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ er lokale min-punkter.

Oppgave 6 Her vil det trolig være greiest å bruke Divergensteoremet. Med $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 - x^2y^2)\mathbf{i} + (\frac{2}{3}xy^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ blir div $\mathbf{F} = 1$. La T være den lukkede flata som består av S og sirkelskiva D gitt ved $x^2+y^2 \leq 1$ og $z = 2$. La ∂T betegne hele randa til T. Da får vi, ved bruk av sylinderkoordinater,

$$\iiint_{\partial T} \text{div } \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+r^2}^2 dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{\pi}{2}.$$

Ved Divergensteoremet blir denne verdien lik fluksen til $\mathbf{F}$ ut av den lukkede flata T. For å få fluksen ut av S må vi trekke fra fluksen gjennom D i retningen $\mathbf{k}$. Denne blir

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dA = 2\pi.$$

Dermed får vi $\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$.

Oppgave 7 For å vise at vektorfeltet er konservativt er det antakelig greiest å påvise at det finnes en potensialfunksjon $\varphi(x,y,z)$. Hvis en slik finnes, så må

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2x + y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x\sin(xy) + z\cos(yz)$$

og

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y\cos(yz).$$

Ved å integrere disse tre uttrykkene henholdsvis med hensyn på x, y og z og sammenholde resultatene, finner vi at alle er tilfredsstilt dersom vi velger $\varphi(x,y,z) = \sin(xy) - \cos(yz) - x^2$. Når vi nå vet at vektorfeltet er konservativt, så vet vi at linjeintegralet av vektorfeltet er uavhengig av veivalg. Dette betyr at vi får

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(\pi/2)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(\pi/2, 1, \pi/2) - \varphi(0,0,0) = 2 - \frac{\pi^2}{4}.$$

Oppgave 8 Utregning gir

$$V_t = \int_0^t \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2(y+2)^2}dydx = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{t}{1+t}.$$

Videre utregning gir at $V_t = \frac{1}{5}$ for $t = 4$. Funksjonen $\frac{t}{1+t}$ er monotont voksende, så dermed er $V_t \geq \frac{1}{5}$ for $t \geq 4$. $T = 4$ er dermed det minste positive tallet som gjør $V_t \geq \frac{1}{5}$ for alle $t \geq T$.

Oppgave 9 Her vil nok det greieste være å bruke Stokes' teorem. Utregning gir curl $\mathbf{F} = (0, -\frac{1}{2}x, 0)$. Kurven $\mathcal{C}$ ligger i planet gitt ved $2x + 2y + z - 2 = 0$. Den oppgitte orienteringen til $\mathcal{C}$ gir at $\widehat{\mathbf{N}}dS = (-2,-2,-1)dxdy$. Stokes' teorem gir da, der T er trekanten som har $\mathcal{C}$ til rand,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_T \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \int_0^1\int_0^{1-y} xdxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2dy = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 10 Høyden fra bunnen og opp til åpningen, H, finnes ved å bruke Pytagoras' setning: $H^2 + 2^2 = 4^4$. Dette gir $H = 2\sqrt{3}$. Siden vannet står halvveis opp i beholderen blir høyden fra bunnen og opp til vannflata lik $\sqrt{3}$.

Volumet av vannet i beholderen kan finnes på mange måter. En måte er følgende: Man kan se for seg en sylinder av vann med radius 2 og høyde $\sqrt{3}$ innerst i beholderen. Denne har da volum $4\pi\sqrt{3}$. Volumet av vannet utenfor denne sylinderen kan regnes ut ved å bruke sylinderkoordinater i følgende itererte integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^{\sqrt{13}} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{-\sqrt{3}} dz r dr d\theta.$$

Her er $z = 0$ satt langs kanten av beholderen. Da vil vannflata ligge på $z = -\sqrt{3}$ og veggen i beholderen vil ligge på $z = -\sqrt{16 - r^2}$. Dette gir z-grensene i integralet ovenfor. Grensene for r fås fra sammenhengen $z = -\sqrt{16 - r^2}$ slik at på vannoverflata, der $z = -\sqrt{3}$, blir $r = \sqrt{13}$. Utregning av integralet I ovenfor gir $5\pi\sqrt{3}$ slik at det totale volumet blir $9\pi\sqrt{3}$.

Det er også mulig å regne ut volumet ved å tenke seg sirkelformede skiver fra bunnen og opp til vannflata. La h betgne høyden fra bunnen i beholderen og $r = r(h)$ betegne radius av den sirkelformede vannflata i høyden h. Ved bruk av Pytagoras' setning får vi $r^2 + (2\sqrt{3} - h)^2 = 16$, som gir $r^2 = 16 - (2\sqrt{3} - h)^2$. La dh betegne tykkelsen av en slik sirkelformet skive. Den vil da ha volum $dV = \pi r^2 dh = \pi(16 - (2\sqrt{3} - h)^2)dh$. Vi får dermed volumet av vannet ved å regne ut følgende integral:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (16 - (2\sqrt{3} - h)^2)dh = 9\sqrt{3}\pi.$$