TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 5. juni 2019

1 Alternativet

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

angir *ikke* volumet av T (det angir volumet av halvkulen med radius 1). Integrasjonsgrensene for ρ må være 0 og $1/\cos\varphi$ og ikke 0 og 1 som i alternativet. Integrasjonsgrensene for φ må være 0 og $\pi/4$ og ikke 0 og $\pi/2$ som i alternativet.

2 La $f(x,y) = x^2 + e^{xy}$ slik at

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x + ye^{xy}, xe^{xy}).$$

Dermed er $\nabla f(1,0) = (2,1)$.

Siden f er en deriverbar funksjon vet vi at $D_{\mathbf{u}} f(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\mathbf{u}$. Altså må $\nabla f(1,0) = (2,1)\cdot\mathbf{u} = 0$ for at $D_{\mathbf{u}} f(1,0) = 0$.

Siden $\pm(-1,2)\cdot(2,1) = 0$ er retningene $\mathbf{u}$ gitt ved

$$\mathbf{u} = \pm\frac{1}{|(-1,2)|}(-1,2) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2).$$

3 Ved å sette inn for $z = x^2 + y^2$ i ligningen for kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ får vi at $z + z^2 = 2$, som har løsninger $z = -2$ og $z = 1$. Siden skjæringskurven må nødvendigvis ligge på paraboloiden $z = x^2 + y^2$ kan vi se bort fra løsningen $z = -2$ (z er aldri negativ på paraboloiden).

Setter vi så inn for $z = 1$ i ligningen for kuleflaten står vi igjen med at $x^2 + y^2 + 1 = 2$, det vil si, $x^2 + y^2 = 1$. Altså er skjæringskurven $\mathcal{C}$ gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. En mulig parametrisering av $\mathcal{C}$ er så

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Buelengden til $\mathcal{C}$ svarer så til omkretsen av en sirkel med radius 1, det vil si, buelengden til $\mathcal{C}$ er lik 2π.

4 Vi bruker Lagranges multiplikatormetode for å finne kandidater for største og minste verdi av $f(x,y) = 4x^2y$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 3$. Lagrangefunksjonen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2 + y^2 - 3) = 4x^2y + \lambda(x^2 + y^2 - 3)$$

har kritiske punkter der $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$. I vårt tilfelle er

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda), \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda), \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)\right) = (8xy + 2\lambda x, 4x^2 + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 3)$$

slik at $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ gir ligningene

$$x(4y + \lambda) = 0 \tag{1}$$
$$2x^2 + \lambda y = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 - 3 = 0. \tag{3}$$

Fra (1) vet vi at $x = 0$ eller $\lambda = -4y$. Innsatt for $x = 0$ i (3) får vi at $y = \pm\sqrt{3}$. Innsatt for $\lambda = -4y$ i (2) får vi at $2x^2 - 4y^2 = 0$, det vil si, $x^2 = 2y^2$. Setter vi inn for $x^2 = 2y^2$ i (3) får vi at $3y^2 - 3 = 0$ som har løsning $y = \pm 1$, og som igjen gir at $x = \pm\sqrt{2}$.

Kandidatene til største og minste verdi av $f(x,y)$ er dermed

$$f(0,\pm\sqrt{3}) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2},-1) = -8 \quad \text{og} \quad f(\pm\sqrt{2},1) = 8.$$

Siden f er en kontinuerlig funksjon og kurven $x^2+y^2=3$ er en lukket og begrenset mengde må f oppnå en største og minste verdi blant punktene vi har funnet. Det vil si, den minste verdien av $f(x,y)$ er -8 og den største verdien av $f(x,y)$ er 8.

5 La $f(x,y) = (x^2+xy^2+y^2)/(x^2+y^2)$. Vi benytter polarkoordinater. For $(x,y) \neq (0,0)$ har vi at

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{r^2\cos^2\theta + r^3\cos\theta\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} \\ &= \frac{r^2 + r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} \\ &= 1 + r\cos\theta\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Legg merke til at $(x,y) \to (0,0)$ hvis og bare hvis $r \to 0$. Siden

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0}\left(1 + r\cos\theta\sin^2\theta\right) = 1$$

og vi vet at $g(t) = \ln t$ er en kontinuerlig funksjon for $t > 0$, har vi at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{x^2+xy^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = \ln 1 = 0.$$

6 Vi benytter sylinderkoordinater.

La T være området i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ulikhetene

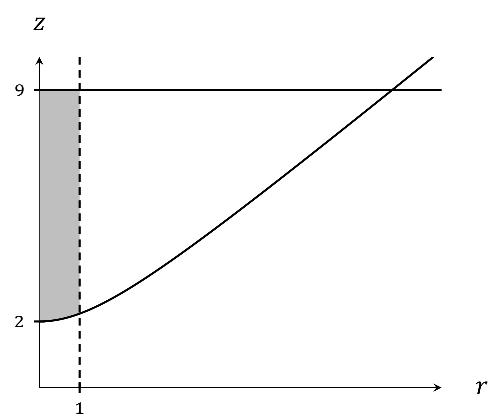
$$2 \leqslant z \leqslant 9, \quad r^2 + 4 \leqslant z^2 \quad \text{og} \quad r^2 \leqslant 1.$$

Figuren til høyre viser projeksjonen av T i rz-planet.

Området T er avgrenset nedentil av hyperboloiden $z^2 - r^2 = 4$ og oventil av planet $z = 9$ og på sidene av sylinderen $r = 1$.

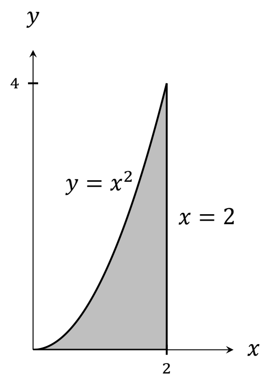
Volumet av T er dermed

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{4+r^2}}^9 r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 r(9-\sqrt{4+r^2})\,dr \\ &= \pi\left[9r^2 - \frac{2}{3}(4+r^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}\left(43 - 2\cdot 5^{3/2}\right). \end{aligned}$$



7 Integrasjonsområdet er avgrenset i x-retning av kurvene $x = \sqrt{y}$ og $x = 2$, ekvivalent $y = x^2$ og $x = 2$; og i y-retning av $y = 0$.

Figuren til høyre er en skisse av integrasjonsområdet. Med integrasjons-rekkefølgen byttet om får vi at



$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 5y\cos(x^5)\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{x^2} 5y\cos(x^5)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 5x^4\cos(x^5)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(x^5)\right]_0^2 = \frac{\sin(32)}{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ For å vise at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$ er konservativt er det nok å vise at det finnes en potensialfunksjon.

En potensialfunksjon φ må tilfredsstille $\nabla\varphi(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$, det vil si,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = x + y + 4x^3y^3 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = y^3 + x + 3x^4y^2. \tag{5}$$

Fra (4) får vi at

$$\varphi(x,y) = \int (x + y + 4x^3y^3)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + x^4y^3 + C_1(y),$$

og fra (5) får vi at

$$\varphi(x,y) = \int (y^3 + x + 3x^4y^2)\,dy = \frac{1}{4}y^4 + xy + x^4y^3 + C_2(x),$$

slik at $C_1(y) = y^4/4 + K_1$ og $C_2(x) = x^2/2 + K_2$ der vi kan sette konstantene K_1 og K_2 til å være 0. Altså er

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 + xy + x^4y^3$$

en potensialfunksjon til $\mathbf{F}(x,y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$.

Ved å utnytte at $\mathbf{F}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$ har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(2e^{2\pi}, 0) - \varphi(2,0) = 2(e^{4\pi} - 1).$$

$\boxed{9}$ Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

I vårt tilfelle er $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 + y^2$.

Fra oppgaveteksten har vi at T kan beskrives i sylinderkoordinater, der $0 \leqslant z \leqslant 4 - r^2$, $0 \leqslant r \leqslant 2$ og $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Altså er

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 (4 - r^2)r^3\,dr = 2\pi\left[r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

$\boxed{10}$ Fra oppaveteksten vet vi at projeksjonen av $\mathcal{C}$ i xy-planet er gitt ved $x^2 + x + y^2 = 2$. Innsatt for dette i $z = (x+2)^2 + y^2 + 1$ får vi at

$$z = (x+2)^2 + y^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 1 = x^2 + x + y^2 + 3x + 5 = 2 + 3x + 5 = 3x + 7.$$

(Vi får det samme om vi setter inn i $z = 10 - (x-1)^2 - y^2$.) Altså ligger $\mathcal{C}$ i planet $z = 3x + 7$. La $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - yz, \cos y + z, x^2 + z^2 + xy)$ slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (x - 1, 2 - 2x^2 - 2y, z).$$

Fra Stokes' teorem har vi så at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er flaten gitt ved $z = 3x + 7$, $(x + 1/2)^2 + y^2 \leqslant 9/4$, og hvor $\hat{\mathbf{N}}\, dS = (-3, 0, 1)\, dx\, dy$. Altså er

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \\
&= \iint_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{9}{4}} (-3x + 3 + z)\, dx\, dy \\
&= 10 \iint_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{9}{4}} dx\, dy \\
&= 10 \cdot \frac{9}{4}\pi = \frac{45}{2}\pi.
\end{aligned}$$