

1 Alternativet

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

angir *ikke* volumet av T (det angir volumet av halvkulen med radius 1). Integrasjonsgrensene for ρ må være 0 og 1/ $\cos \varphi$ og ikke 0 og 1 som i alternativet. Integrasjonsgrensene for φ må være 0 og $\pi/4$ og ikke 0 og $\pi/2$ som i alternativet.

2 La $f(x, y) = x^2 + e^{xy}$ slik at

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + ye^{xy}, xe^{xy}).$$

Dermed er $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$.

Siden f er en deriverbar funksjon vet vi at $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{u}$. Altså må $\nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{u} = (2, 1) \cdot \mathbf{u} = 0$ for at $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = 0$.

Siden $\pm(-1, 2) \cdot (2, 1) = 0$ er retningene \mathbf{u} gitt ved

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{|(-1, 2)|}(-1, 2) = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2).$$

3 Ved å sette inn for $z = x^2 + y^2$ i ligningen for kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ får vi at $z + z^2 = 2$, som har løsninger $z = -2$ og $z = 1$. Siden skjæringskurven må nødvendigvis ligge på paraboloiden $z = x^2 + y^2$ kan vi se bort fra løsningen $z = -2$ (z er aldri negativ på paraboloiden).

Setter vi så inn for $z = 1$ i ligningen for kuleflaten står vi igjen med at $x^2 + y^2 + 1 = 2$, det vil si, $x^2 + y^2 = 1$. Altså er skjæringskurven \mathcal{C} gitt ved $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. En mulig parametrisering av \mathcal{C} er så

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Buelengden til \mathcal{C} svarer så til omkretsen av en sirkel med radius 1, det vil si, buelengden til \mathcal{C} er lik 2π .

4 Vi bruker Lagranges multiplikator metode for å finne kandidater for største og minste verdi av $f(x, y) = 4x^2y$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 3$. Lagrangefunksjonen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 3) = 4x^2y + \lambda(x^2 + y^2 - 3)$$

har kritiske punkter der $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$. I vårt tilfelle er

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda), \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda), \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) \right) = (8xy + 2\lambda x, 4x^2 + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 3)$$

slik at $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ gir ligningene

$$x(4y + \lambda) = 0 \tag{1}$$

$$2x^2 + \lambda y = 0 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 3 = 0. \tag{3}$$

Fra (1) vet vi at $x = 0$ eller $\lambda = -4y$. Innsatt for $x = 0$ i (3) får vi at $y = \pm\sqrt{3}$. Innsatt for $\lambda = -4y$ i (2) får vi at $2x^2 - 4y^2 = 0$, det vil si, $x^2 = 2y^2$. Setter vi inn for $x^2 = 2y^2$ i (3) får vi at $3y^2 - 3 = 0$ som har løsning $y = \pm 1$, og som igjen gir at $x = \pm\sqrt{2}$.

Kandidatene til største og minste verdi av $f(x, y)$ er dermed

$$f(0, \pm\sqrt{3}) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, -1) = -8 \quad \text{og} \quad f(\pm\sqrt{2}, 1) = 8.$$

Siden f er en kontinuerlig funksjon og kurven $x^2 + y^2 = 3$ er en lukket og begrenset mengde må f oppnå en største og minste verdi blant punktene vi har funnet. Det vil si, den minste verdien av $f(x, y)$ er -8 og den største verdien av $f(x, y)$ er 8 .

- 5 La $f(x, y) = (x^2 + xy^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$. Vi benytter polarkoordinater. For $(x, y) \neq (0, 0)$ har vi at

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \\ &= \frac{r^2 + r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} \\ &= 1 + r \cos \theta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Legg merke til at $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ hvis og bare hvis $r \rightarrow 0$. Siden

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} (1 + r \cos \theta \sin^2 \theta) = 1$$

og vi vet at $g(t) = \ln t$ er en kontinuerlig funksjon for $t > 0$, har vi at

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln \left(\frac{x^2 + xy^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) = \ln 1 = 0.$$

- 6 Vi benytter sylinderkoordinater.

La T være området i \mathbb{R}^3 gitt ved ulikhetene

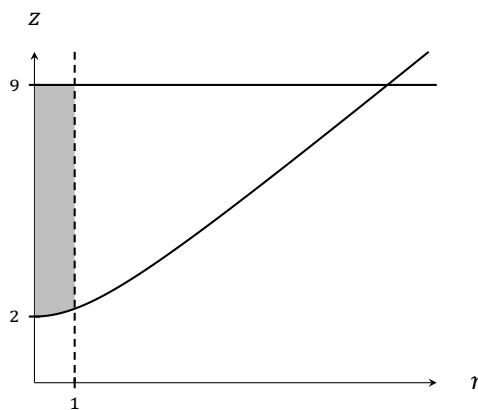
$$2 \leq z \leq 9, \quad r^2 + 4 \leq z^2 \quad \text{og} \quad r^2 \leq 1.$$

Figuren til høyre viser projeksjonen av T i rz -planet.

Området T er avgrenset nedentil av hyperboloiden $z^2 - r^2 = 4$ og oventil av planet $z = 9$ og på sidene av sylindere $r = 1$.

Volumet av T er dermed

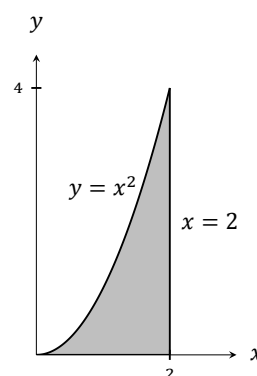
$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{4+r^2}}^9 r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r(9 - \sqrt{4+r^2}) \, dr \\ &= \pi \left[9r^2 - \frac{2}{3}(4+r^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} (43 - 2 \cdot 5^{3/2}). \end{aligned}$$



- 7 Integrasjonsområdet er avgrenset i x -retning av kurvene $x = \sqrt{y}$ og $x = 2$, ekvivalent $y = x^2$ og $x = 2$; og i y -retning av $y = 0$.

Figuren til høyre er en skisse av integrasjonsområdet. Med integrasjonsrekkefølgen byttet om får vi at

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 5y \cos(x^5) dx dy &= \int_0^2 \int_0^{x^2} 5y \cos(x^5) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 5x^4 \cos(x^5) dx \\ &= \frac{1}{2} [\sin(x^5)]_0^2 = \frac{\sin(32)}{2}.\end{aligned}$$



- 8 For å vise at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$ er konservativt er det nok å vise at det finnes en potensialfunksjon.

En potensialfunksjon φ må tilfredsstille $\nabla\varphi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$, det vil si,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = x + y + 4x^3y^3 \quad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = y^3 + x + 3x^4y^2. \quad (5)$$

Fra (4) får vi at

$$\varphi(x, y) = \int (x + y + 4x^3y^3) dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + x^4y^3 + C_1(y),$$

og fra (5) får vi at

$$\varphi(x, y) = \int (y^3 + x + 3x^4y^2) dy = \frac{1}{4}y^4 + xy + x^4y^3 + C_2(x),$$

slik at $C_1(y) = y^4/4 + K_1$ og $C_2(x) = x^2/2 + K_2$ der vi kan sette konstantene K_1 og K_2 til å være 0. Altså er

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 + xy + x^4y^3$$

en potensialfunksjon til $\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$.

Ved å utnytte at $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ har vi at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(2e^{2\pi}, 0) - \varphi(2, 0) = 2(e^{4\pi} - 1).$$

- 9 Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

I vårt tilfelle er $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Fra oppgaveteksten har vi at T kan beskrives i sylinderkoordinater, der $0 \leq z \leq 4 - r^2$, $0 \leq r \leq 2$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Altså er

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2 \cdot r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^2 (4 - r^2)r^3 dr = 2\pi \left[r^4 - \frac{1}{6}r^6 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

- 10 Fra oppgaveteksten vet vi at projeksjonen av \mathcal{C} i xy -planet er gitt ved $x^2 + x + y^2 = 2$. Innsatt for dette i $z = (x + 2)^2 + y^2 + 1$ får vi at

$$z = (x + 2)^2 + y^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 1 = x^2 + x + y^2 + 3x + 5 = 2 + 3x + 5 = 3x + 7.$$

(Vi får det samme om vi setter inn i $z = 10 - (x - 1)^2 - y^2$.) Altså ligger \mathcal{C} i planet $z = 3x + 7$.

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - yz, \cos y + z, x^2 + z^2 + xy)$ slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (x - 1, 2 - 2x - 2y, z).$$

Fra Stokes' teorem har vi så at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

der S er flaten gitt ved $z = 3x + 7$, $(x + 1/2)^2 + y^2 \leq 9/4$, og hvor $\hat{\mathbf{N}} \, dS = (-3, 0, 1) \, dx \, dy$.

Altså er

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \\ &= \iint_{(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}} (-3x + 3 + z) \, dx \, dy \\ &= 10 \iint_{(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}} dx \, dy \\ &= 10 \cdot \frac{9}{4} \pi = \frac{45}{2} \pi. \end{aligned}$$