

1 Alternativet

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 2 - \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

er ikke en parametrisering av \mathcal{C} . En måte å se det på er å se på x -komponenten: dette er det eneste alternativet der x -komponenten tar verdier mellom -2 og 2 . For de tre andre alternativene tar x -komponenten verdier mellom 0 og 2 .

2 Ved å utnytte at $x^2 + y^2 = 1$ kan vi sette inn $y^2 = 1 - x^2$ i uttrykket for $f(x, y)$, det vil si,

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + x - y^2 = x^3 + x^2 + x - (1 - x^2) = x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

La $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ for $-1 \leq x \leq 1$. Vi undersøker verdien av $g(x)$ i endepunktene; $g(-1) = -1$ og $g(1) = 3$. Siden $g'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = (3x + 1)(x + 1)$, har $g(x)$ et kritisk punkt i $x = -1/3$ ($x = -1$ er allerede behandlet som et endepunkt), der $g(-1/3) = -1/27 + 2/9 - 1/3 - 1 = -31/27$. Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ er en lukket og begrenset mengde, og f er kontinuerlig, så f må ha en største og en minste verdi på kurven. Disse må være blant punktene vi har funnet, og vi slutter at minste verdi av $f(x, y)$ er $-31/27$ på $x^2 + y^2 = 1$ og største verdi av $f(x, y)$ er 3 på $x^2 + y^2 = 1$.

3 I vårt tilfelle er

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{4}{t}, 2t, 4 \right)$$

slik at

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 4t^2 + 16} = \sqrt{\frac{4t^4 + 16t^2 + 16}{t^2}} = 2\sqrt{\frac{(t^2 + 2)^2}{t^2}} = \frac{2(t^2 + 2)}{t} = 2t + \frac{4}{t}.$$

Buelengden til \mathcal{C} er dermed

$$s = \int_c ds = \int_1^e |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_1^e \left(2t + \frac{4}{t} \right) dt = [t^2 + 4 \ln t]_1^e = e^2 + 3.$$

4 Funksjonen er kontinuerlig for alle $(x, y) \neq (0, 0)$. For at f skal være kontinuerlig i $(x, y) = (0, 0)$ må

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

La $y = kx$, der $k \neq 0$ og $x \neq 0$. Siden

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx^2 + k^3x^3}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k + k^3x}{1 + k^2} \rightarrow \frac{k}{1 + k^2}$$

når $x \rightarrow 0$. Altså kan ikke grenseverdien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

eksistere. Dermed er ikke funksjonen kontinuerlig i $(x, y) = (0, 0)$.

5 Vi regner ut det innerste integralet og får at

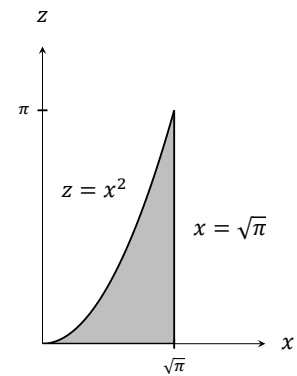
$$\int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(xy) dy dx dz = \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{\cos(xy)}{x} \right]_0^x dx dz = \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x} \right) dx dz.$$

For å regne ut det resulterende itererte integralet bytter vi om på integrasjonsrekkefølgen.

Integrasjonsområdet er avgrenset i x -retning av kurvene $x = \sqrt{z}$ og $x = \sqrt{\pi}$, ekvivalent $z = x^2$ og $x = \sqrt{\pi}$; og z -retning av $z = 0$.

Med integrasjonsrekkefølgen byttet om får vi at

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x} \right) dx dz &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x} \right) dz dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} (x - x \cos(x^2)) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



- 6 Vi benytter kulekoordinater. Fra oppgaveteksten har vi at $0 \leq \rho \leq 3$. Fra $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ og $0 \leq x \leq y$ får vi at

$$0 \leq \rho \cos \varphi \leq \rho \sin \varphi$$

slik at $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$. Fra $0 \leq x \leq y$ får vi at $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$. Altså er volumet av det aktuelle området gitt ved

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{9}{4} \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{9\sqrt{2}}{8} \pi.$$

- 7 Siden

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, x) \neq (0, 0, 0)$$

kan ikke \mathbf{F} være konservativt.

For at $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + \mathbf{G}(x, y, z)$ skal være et ikke-konstant konservativt vektorfelt, må

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{H}(x, y, z) &= \operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G})(x, y, z) \\ &= \operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) + \operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) \\ &= (0, 0, x) + \operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) \\ &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

det vil si, $\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = (0, 0, -x)$. Fra definisjonen av curl medfører det at for

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

må

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -x$$

for at $\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = -x$.

La $P(x, y, z) = R(x, y, z) = 0$ og la $Q(x, y, z) = -x^2/2$. Altså gir $\mathbf{G}(x, y, z) = (0, -x^2/2, 0)$ at

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + \mathbf{G}(x, y, z) = (xy, x^2 + 1, z^2) + \left(0, -\frac{x^2}{2}, 0 \right) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + 1, z^2 \right)$$

er et ikke-konstant konservativt vektorfelt.

- 8 La $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (y^3, 27x - x^3)$. Greens teorem gir at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R (27 - 3(x^2 + y^2)) dA,$$

der R er området i xy -planet hvis rand er \mathcal{C} og hvor \mathcal{C} er positivt orientert.

Dobbeltintegralet

$$\iint_R (27 - 3(x^2 + y^2)) dA$$

er størst når integranden alltid er positiv: $27 - 3(x^2 + y^2) \geq 0$ for alle $(x, y) \in R$. La derfor R være sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$ slik at

$$\iint_R (27 - 3(x^2 + y^2)) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (27 - 3r^2)r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{27}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^3 = \frac{243}{2}\pi.$$

Altså får vi størst verdi av

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når C er kurven $x^2 + y^2 = 9$ (orientert mot klokken), og der verdien av integralet er $243\pi/2$.

9 Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av området T og ∂T er randen (overflaten) til T . Legg merke til at T består av flatene \mathcal{B} og \mathcal{L} i tillegg til \mathcal{S} , der \mathcal{B} er flaten $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ og \mathcal{L} er flaten $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 16$.

I vårt tilfelle er $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 1$ slik a

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_T dV.$$

Ved å utnytte at volumet av T kan uttrykkes som differansen mellom volumet av kjeglen med radius 4 og høyde 4, og kjeglen med radius 1 og høyde 1. Altså er

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_T dV = \frac{\pi}{3} (4^2 \cdot 4 - 1^2 \cdot 1) = 21\pi.$$

Siden

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS + \iint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS - \iint_{\mathcal{B}} dS + \iint_{\mathcal{L}} 4 dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS - \pi \cdot 1^2 + 4\pi \cdot 4^2 \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + 63\pi \end{aligned}$$

får vi at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS - 63\pi = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV - 63\pi = 21\pi - 63\pi = -42\pi.$$

10 La $\mathbf{F}(x, y, z) = (4z + e^{\cos x}, y^4, x + 2y)$ slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (2, 3, 0).$$

La \mathcal{S} være flaten $y = 0$, $x^2 + z^2 \leq 1$. Fra Stokes' teorem vet vi at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

I vårt tilfelle må $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{j}$ siden C skal være orientert mot klokken sett fra positiv y -akse. Altså er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} dS = \iint_{\mathcal{S}} 3 dS = 3\pi \cdot 1^2 = 3\pi.$$