TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 6. august 2019

1 Alternativet

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 2 - \sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

er *ikke* en parametrisering av $\mathcal{C}$. En måte å se det på er å se på x-komponenten: dette er det eneste alternativet der x-komponenten tar verdier mellom -2 og 2. For de tre andre alternativene tar x-komponenten verdier mellom 0 og 2.

2 Ved å utnytte at $x^2 + y^2 = 1$ kan vi sette inn $y^2 = 1 - x^2$ i uttrykket for $f(x, y)$, det vil si,

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + x - y^2 = x^3 + x^2 + x - (1 - x^2) = x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

La $g(x) = x^3+2x^2+x-1$ for $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Vi undersøker verdien av $g(x)$ i endepunktene; $g(-1) = -1$ og $g(1) = 3$. Siden $g'(x) = 3x^2+4x+1 = (3x+1)(x+1)$, har $g(x)$ et kritisk punkt i $x = -1/3$ ($x = -1$ er allerede behandlet som et endepunkt), der $g(-1/3) = -1/27+2/9-1/3-1 = -31/27$.

Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ er en lukket og begrenset mengde, og f er kontinuerlig, så f må ha en største og en minste verdi på kurven. Disse må være blant punktene vi har funnet, og vi slutter at minste verdi av $f(x, y)$ er $-31/27$ på $x^2+y^2 = 1$ og største verdi av $f(x, y)$ er 3 på $x^2+y^2 = 1$.

3 I vårt tilfelle er

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{4}{t}, 2t, 4\right)$$

slik at

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 4t^2 + 16} = \sqrt{\frac{4t^4 + 16t^2 + 16}{t^2}} = 2\sqrt{\frac{(t^2 + 2)^2}{t^2}} = \frac{2(t^2 + 2)}{t} = 2t + \frac{4}{t}.$$

Buelengden til $\mathcal{C}$ er dermed

$$s = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_1^e |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_1^e \left(2t + \frac{4}{t}\right) dt = \left[t^2 + 4\ln t\right]_1^e = e^2 + 3.$$

4 Funksjonen er kontinuerlig for alle $(x, y) \neq (0, 0)$. For at f skal være kontinuerlig i $(x, y) = (0, 0)$ må

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

La $y = kx$, der $k \neq 0$ og $x \neq 0$. Siden

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx^2 + k^3x^3}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k + k^3x}{1 + k^2} \to \frac{k}{1 + k^2}$$

når $x \to 0$. Altså kan ikke grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

eksistere. Dermed er ikke funksjonen kontinuerlig i $(x, y) = (0, 0)$.

5 Vi regner ut det innerste integralet og får at

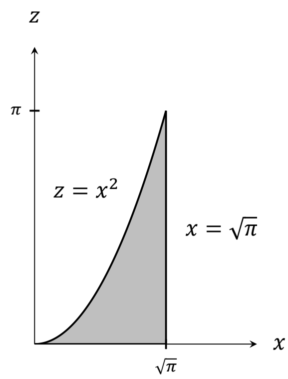
$$\int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(xy)\, dy\, dx\, dz = \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{\cos(xy)}{x}\right]_0^x dx\, dz = \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x}\right) dx\, dz.$$

For å regne ut det resulterende itererte integralet bytter vi om på integrasjonsrekkefølgen.

Integrasjonsområdet er avgrenset i x-retning av kurvene $x = \sqrt{z}$ og $x = \sqrt{\pi}$, ekvivalent $z = x^2$ og $x = \sqrt{\pi}$; og z-retning av $z = 0$.

Med integrasjonsrekkefølgen byttet om får vi at

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x^2)}{x}\right)dx\,dz &= \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x^2)}{x}\right)dz\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}}\big(x - x\cos(x^2)\big)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$



6 Vi benytter kulekoordinater. Fra oppgaveteksten har vi at $0 \leqslant \rho \leqslant 3$. Fra $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ og $0 \leqslant x \leqslant y$ får vi at

$$0 \leqslant \rho\cos\varphi \leqslant \rho\sin\varphi$$

slik at $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Fra $0 \leqslant x \leqslant y$ får vi at $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Altså er volumet av det aktuelle området gitt ved

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{9}{4}\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{9\sqrt{2}}{8}\pi.$$

7 Siden

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\times\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,x) \neq (0,0,0)$$

kan ikke $\mathbf{F}$ være konservativt.

For at $\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + \mathbf{G}(x,y,z)$ skal være et ikke-konstant konservativt vektorfelt, må

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{H}(x,y,z) &= \operatorname{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})(x,y,z) \\ &= \operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) + \operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) \\ &= (0,0,x) + \operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) \\ &= (0,0,0),\end{aligned}$$

det vil si, $\operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) = (0,0,-x)$. Fra definisjonen av curl medfører det at for

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

må

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = -x$$

for at $\operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) = -x$.

La $P(x,y,z) = R(x,y,z) = 0$ og la $Q(x,y,z) = -x^2/2$. Altså gir $\mathbf{G}(x,y,z) = (0,-x^2/2,0)$ at

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + \mathbf{G}(x,y,z) = \big(xy, x^2+1, z^2\big) + \left(0, -\frac{x^2}{2}, 0\right) = \left(xy, \frac{x^2}{2}+1, z^2\right)$$

er et ikke-konstant konservativt vektorfelt.

8 La $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (y^3, 27x - x^3)$. Greens teorem gir at

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_R (27 - 3(x^2+y^2))\,dA,$$

der R er området i xy-planet hvis rand er $\mathcal{C}$ og hvor $\mathcal{C}$ er positivt orientert.

Dobbeltintegralet

$$\iint_R (27-3(x^2+y^2))\,dA$$

er størst når integranden alltid er positiv: $27 - 3(x^2 + y^2) \geqslant 0$ for alle $(x, y) \in R$. La derfor R være sirkelskiven $x^2 + y^2 \leqslant 9$ slik at

$$\iint_R (27 - 3(x^2 + y^2))\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (27 - 3r^2) r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{27}{2} r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right]_0^3 = \frac{243}{2} \pi.$$

Altså får vi størst verdi av

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathcal{C}$ er kurven $x^2 + y^2 = 9$ (orientert mot klokken), og der verdien av integralet er $243\pi/2$.

9 Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV,$$

der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av området T og ∂T er randen (overflaten) til T. Legg merke til at T består av flatene $\mathcal{B}$ og $\mathcal{L}$ i tillegg til $\mathcal{S}$, der $\mathcal{B}$ er flaten $z = 1$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ og $\mathcal{L}$ er flaten $z = 4$, $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

I vårt tilfelle er $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 1$ slik at

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv = \iiint_T dV.$$

Ved å utnytte at volumet av T kan uttrykkes som differansen mellom volumet av kjeglen med radius 4 og høyde 4, og kjeglen med radius 1 og høyde 1. Altså er

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_T dV = \frac{\pi}{3} \left(4^2 \cdot 4 - 1^2 \cdot 1 \right) = 21\pi.$$

Siden

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS + \iint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS \\
&= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS - \iint_{\mathcal{B}} dS + \iint_{\mathcal{L}} 4\, dS \\
&= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS - \pi \cdot 1^2 + 4\pi \cdot 4^2 \\
&= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS + 63\pi
\end{aligned}$$

får vi at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS - 63\pi = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV - 63\pi = 21\pi - 63\pi = -42\pi.$$

10 La $\mathbf{F}(x, y, z) = (4z + e^{\cos x}, y^4, x + 2y)$ slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (2, 3, 0).$$

La $\mathcal{S}$ være flaten $y = 0$, $x^2 + z^2 \leqslant 1$. Fra Stokes' teorem vet vi at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS.$$

I vårt tilfelle må $\widehat{\mathbf{N}} = \mathbf{j}$ siden $\mathcal{C}$ skal være orientert mot klokken sett fra positiv y-akse. Altså er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{j}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} 3\, dS = 3\pi \cdot 1^2 = 3\pi.$$