NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 22. mai 2018

1 Legg merke til at $x^2+(y-1)^2=1$ kan skrives som $x^2+y^2=2y$. Ved å benytte sylinderkoordinater får vi så at $r^2=2r\sin\theta$ og $z=3r$, der $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

En mulig parametrisering for skjæringskurven er så gitt ved

$$\mathbf{r}(\theta)=(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta, z(\theta))=(2\sin\theta\cos\theta, 2\sin^2\theta, 6\sin\theta)=(\sin 2\theta, 2\sin^2\theta, 6\sin\theta),$$

der $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

2 En mulig parametrisering av sirkelen $\mathcal{C}$, gitt ved $x^2+y^2=1$ orientert mot klokken, er gitt ved

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t, \sin t),$$

der $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Dermed er $dx=-\sin t\,dt$ og $dy=\cos t\,dt$ slik at

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} y\,dx+(xy-x)\,dy &= \int_0^{2\pi}\big(-\sin^2 t+\cos^2 t(\sin t-1)\big)\,dt=-\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t\sin t)\,dt\\ &= -\left[t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}=-2\pi.\end{aligned}$$

Siden $\mathcal{C}$ er en enkel, lukket og glatt kurve i $\mathbb{R}^2$ og

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathcal{C}} y\,dx+(xy-x)\,dy=-2\pi\neq 0$$

kan ikke vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y)=(y, xy-x)$ være konservativt.

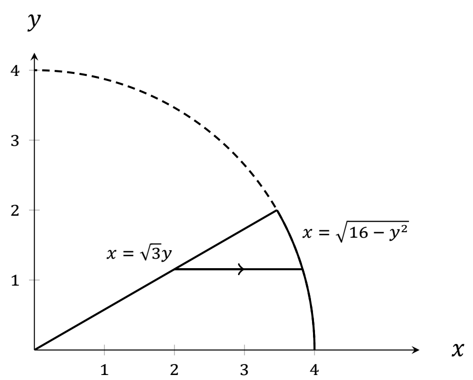
3 Integrasjonsområdet er x-enkelt og vi kan uttrykke summen av de to itererte integralene som ett iterert integral, der

$$\int_0^{2\sqrt{3}}\int_0^{x/\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx+\int_{2\sqrt{3}}^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx=\int_0^2\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{16-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Integrasjonsområdet kan beskrives med polarkoordinater, der $0\leqslant r\leqslant 4$ og $0\leqslant\theta\leqslant\arctan(2/2\sqrt{3})=\pi/6$.

Dermed er

$$\begin{aligned}&\int_0^2\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{16-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\\ &=\int_0^{\pi/6}\int_0^4 r^2\,dr\,d\theta\\ &=\frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^4\\ &=\frac{32}{9}\pi.\end{aligned}$$



4 Projeksjonen av T ned i xy-planet er gitt ved

$$x^2+y^2-1=2+\frac{2}{3}(x^2+y^2),$$

det vil si, $x^2 + y^2 = 9$.

Legg merke til at $x^2+y^2-1 \leqslant 0$ for $x^2+y^2 \leqslant 1$. Legemet T kan beskrives med sylinderkoordinater, der

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2 + \frac{2}{3}r^2$$

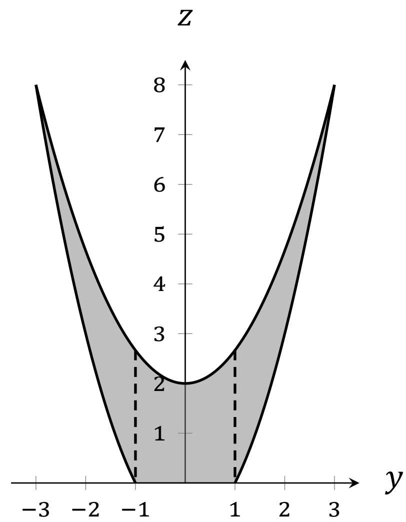
og

$$1 \leqslant r \leqslant 3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad r^2 - 1 \leqslant z \leqslant 2 + \frac{2}{3}r^2.$$

En skisse av snittet mellom T og yz-planet er gitt i figuren til høyre.

Volumet V av T er så gitt ved

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_T dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2+2r^2/3} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{r^2-1}^{2+2r^2/3} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^1 \left(2+\frac{2}{3}r^2\right) r\,dr + 2\pi\int_1^3\left(3-\frac{1}{3}r^2\right) r\,dr \\
&= 2\pi\left[r^2+\frac{1}{6}r^4\right]_0^1 + 2\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{12}r^4\right]_1^3 \\
&= 13\pi.
\end{aligned}$$



5 Flaten er beskrevet som grafen til funksjonen $z = f(x,y) = \sqrt{2xy}$, der $0 \leqslant x \leqslant 1$ og $0 \leqslant y \leqslant 2$. Siden

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{2xy}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2xy}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{2xy}}\,dx\,dy = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy$$

får vi at arealet A av $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$A = \iint_{\mathcal{S}} dA = \int_0^2\int_0^1 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2y}}\int_0^1\left(\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2y}}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2y\sqrt{x}\right]_{x=0}^1 dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(\frac{2}{3\sqrt{y}} + 2\sqrt{y}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}\sqrt{y} + \frac{4}{3}y^{3/2}\right]_0^2 = 4.$$

6 La

$$f(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$$

slik at

$$\nabla f(x,y) = -\frac{200}{(1+x^2+2y^2)^2}\,(x, 2y)$$

som igjen gir at

$$\nabla f(6,3) = \frac{48}{121}(-1,-1).$$

La $\mathbf{u} = (-1,-1)/|(-1,-1)| = 1/\sqrt{2}(-1,-1)$. Den retningsderiverte til f i retningen $\mathbf{u}$ i punktet $(6,3,20/11)$ er så gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f(6,3) = \nabla f(6,3) \cdot \mathbf{u} = \frac{48}{121\sqrt{2}}(1+1) = \frac{48\sqrt{2}}{121}$$

Siden $|\mathbf{u}| = 1$ blir dermed helningsvinkelen til terrenget i retningen $(-1,-1)$ i punktet $(6,3,20/11)$ gitt ved

$$\theta = \arctan \frac{48\sqrt{2}}{121} \approx 0.511,$$

som tilsvarer 29.3°.

$\boxed{7}$ **a)** Halvkulen T kan beskrives med kulekoordinater, der

$$0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \text{og} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Massen m til T er så gitt ved

$$\begin{aligned} m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV = \iiint_T kz\,dV &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ = \frac{1}{2}ka^4\pi \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \,d\varphi &= \frac{1}{2}ka^4\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}ka^4\pi. \end{aligned}$$

b) I vårt tilfelle er $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z + z^2 - z^2 - xe^y + xe^y = z$. Dermed er

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T z\,dV = \frac{1}{4}a^4\pi,$$

der den siste likheten følger ved å benytte resultatet fra **a)** med $k = 1$.
Randen til T, ∂T, består av halvkuleflaten $\mathcal{S}$ og sirkelskiven $\mathcal{B}$ gitt ved $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ og $z = 0$.
For at enhetsnormalvektoren skal peke ut av T må $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ på $\mathcal{B}$, slik at

$$\iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = -\iint_{\mathcal{B}} dS = -\pi a^2,$$

der den neste siste likheten følger fra at $z = 0$ på $\mathcal{B}$.
Fra divergensteoremet vet vi at

$$\iint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS - \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS.$$

Innsatt for det vi har regnet ut tidligere i oppgaven finner vi så at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV - \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{1}{4}a^4\pi + \pi a^2.$$

$\boxed{8}$ La $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^2, xy, xz\right)$ slik at

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial y}xz - \frac{\partial}{\partial z}xy, -\left(\frac{\partial}{\partial x}xz - \frac{\partial}{\partial z}y^2\right), \frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial y}y^2\right) = (0,-z,-y).$$

La så $\mathcal{S}$ være flaten som ligger i planet $y = z$ hvis projeksjon i xy-planet er gitt ved $x^2 + y^2 \leqslant 2y$.
La enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}$ til $\mathcal{S}$ ha positiv $\mathbf{k}$-komponent, det vil si

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

Legg merke til at $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$.

Stokes' teorem gir så at

$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\mathcal{S}} (z-y)\,dS = 0,$$

der den siste likheten følger av at $y = z$ på $\mathcal{S}$.

$\boxed{9}$ Fra definisjonen av partiellderivasjon har vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

La $(x,y) \neq (0,0)$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

For å vise at $\partial f/\partial x$ ikke er kontinuerlig i $(0,0)$ holder det å vise at grenseverdien til $\partial f/\partial x$ når $(x,y)\to(0,0)$ vil være forskjellig fra 0 eller at den ikke eksisterer for en eller annen retning.

La $x = 0$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{2y(y^2-0^2)}{(0^2+y^2)^2} = \frac{2y^3}{y^4} = \frac{2}{y}.$$

Siden grenseverdien

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{2}{y}$$

ikke eksisterer kan heller ikke

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

eksistere. Altså er ikke $\partial f/\partial x$ kontinuerlig i $(0,0)$.