NTNU

Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 8. august 2018

1 La $F(x,y,z) = 4(x+1)^2 + 6(y-1)^2 + x^2(z-2)^2 - 16$. Da er

$$\nabla F(x,y,z) = \big(8(x+1) + 2x(z-2)^2, 12(y-1), 2x^2(z-2)\big)$$

slik at $\nabla F(1/2,2,0) = (16,12,-1)$. Siden $\nabla F(1/2,2,0)$ står normalt på nivåflaten $F(x,y,z) = 0$ i punktet $(1/2,2,0)$ har vi at

$$\nabla F(1/2,2,0) \cdot (x - 1/2, y-2, z) = 16x + 12y - z - 32 = 0.$$

Det vil si, en ligning for tangentplanet til $F(x,y,z) = 0$ i punktet $(1/2,2,0)$ er gitt ved

$$16x + 12y - z = 32.$$

2 I vårt tilfelle er

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, -\cos t, \cos t)$$

slik at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. Dermed er enhetstangentvektoren i et vilkårlig punkt på kurven gitt ved

$$\widehat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \left(-\sin t, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right).$$

Siden

$$\widehat{\mathbf{T}}'(t) = \left(-\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)$$

og $|\widehat{\mathbf{T}}'(t)| = 1$ får vi at enhetsnormalvektoren i et vilkårlig punkt på kurven er gitt ved

$$\widehat{\mathbf{N}}(t) = \frac{\widehat{\mathbf{T}}'(t)}{|\widehat{\mathbf{T}}'(t)|} = \widehat{\mathbf{T}}'(t) = \left(-\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right).$$

Ved å utnytte at akselerasjonsvektoren kan dekomponeres i en tangentkomponent og en normalkomponent,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\widehat{\mathbf{T}}(t) + \kappa(t)|\mathbf{r}'(t)|^2\widehat{\mathbf{N}}(t)$$

får i vårt tilfelle at

$$\mathbf{r}''(t) = (-\sqrt{2}\cos t, \sin t, -\sin t) = 2\kappa(t)\widehat{\mathbf{N}}(t)$$

som gir at krumningen i et vilkårlig punkt på kurven er gitt ved

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3 For lagrangefunksjonen $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^3 + y^3 - 16)$ får vi at

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \big(ye^{xy} + 3\lambda x^2, xe^{xy} + 3\lambda y^2, x^3 + y^3 - 16\big) = (0,0,0)$$

som gir ligningene

$$ye^{xy} + 3\lambda x^2 = 0 \tag{1}$$
$$xe^{xy} + 3\lambda y^2 = 0 \tag{2}$$
$$x^3 + y^3 - 16 = 0. \tag{3}$$

Ved å gange ligning (1) med x og gange ligning (2) med y får vi

$$xye^{xy} + 3\lambda x^3 = 0 \tag{1'}$$
$$xye^{xy} + 3\lambda y^3 = 0. \tag{2'}$$

Ved å ta differansen mellom ligning (1') og ligning (2') får vi at

$$3\lambda(x^3 - y^3) = 3\lambda(2x^3 - 16) = 6\lambda(x^3 - 8) = 0,$$

der vi har utnyttet at $y^3 = 16 - x^3$ (fra ligning (3)). Altså er enten $\lambda = 0$ eller $x = 2$. I tilfellet $\lambda = 0$ må $y = 0$ og $x = 0$ fra henholdsvis ligning (1) og (2). Men ligning (3) er ikke tilfredsstilt for $x = y = 0$, og altså må $\lambda \neq 0$.

Dermed står vi igjen med at $x = 2$ som innsatt i ligning (3) gir at $y = 2$, og hvor

$$f(2,2) = e^4.$$

Endepunktene til kurven $x^3 + y^3 = 16$ i 1. kvadrant er gitt ved $(2\sqrt[3]{2}, 0)$ og $(0, 2\sqrt[3]{2})$, der

$$f(2\sqrt[3]{2}, 0) = f(0, 2\sqrt[3]{2}) = e^0 = 1.$$

Siden $f(2,2) > f(2\sqrt[3]{2}, 0) = f(0, 2\sqrt[3]{2})$ er den største verdien til $f(x,y) = e^{xy}$ på kurven $x^3 + y^3 = 16$, der (x,y) ligger i 1. kvadrant, gitt ved $f(2,2) = e^4$.

$\boxed{4}$ Området T er beskrevet ved

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \frac{r\cos\theta}{1+r^2}$$

i sylinderkoordinater. Volumet V av T er så gitt ved

$$\begin{aligned} V = \iiint_T dV &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{r\cos\theta/(1+r^2)} r\,dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{1+r^2}\,d\theta\,dr = \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,dr \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr = \big[r - \arctan r\big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ La $u = x^2 + y^2$ og $v = y^2/x$. Jacobideterminanten er så gitt ved

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 2y\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

slik at

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2y\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right)}.$$

Området R kan beskrives ved $1 \leqslant u \leqslant 4$ og $1 \leqslant v \leqslant 2$ i uv-planet. Siden

$$\frac{y^3}{x}\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{y^2}{2x} = \frac{1}{2}v$$

får vi at

$$\iint_R \frac{y^3}{x}\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy = \int_1^2 \int_1^4 \frac{y^3}{x}\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{2}v\,du\,dv = \frac{9}{4}.$$

6 Linjeintegralet er uavhengig av veivalg hvis vektorfeltet er konservativt. Vektorfeltet er konservativt (i $\mathbb{R}^3$) hvis det har en potensialfunksjon. En potensialfunksjon er en funksjon $\varphi(x,y,z)$ slik at $\nabla\varphi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z)$ for alle punkter (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$. Det gir ligningene

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz \tag{4}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = x^2 z \tag{5}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = yf(x). \tag{6}$$

Funksjonen $\varphi(x,y,z) = x^2yz$ tilfredsstiller ligning (4) og ligning (5). Ved å partiellderivere $\varphi(x,y,z) = x^2yz$ med hensyn på z får vi at

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = x^2y = yf(x),$$

der den siste likheten følger fra ligning (6). Altså er $f(x) = x^2$.

Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(a,b,c) - \varphi(0,0,0) = a^2bc$$

for en vilkårlig kurve $\mathcal{C}'$ i $\mathbb{R}^3$ med startpunkt i $(0,0,0)$ og endepunkt i (a,b,c).

7 I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (1+\sin t, \sin t)$. La $\mathbf{F}(x,y) = (-y, 0)$ slik at

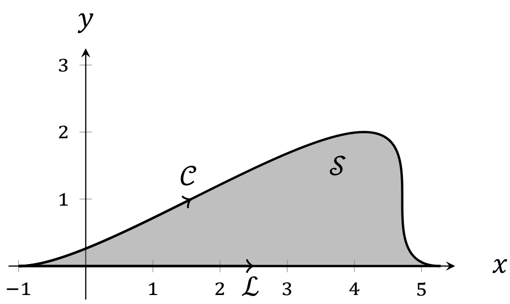
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = (\cos t - 1, 0)\cdot(1+\sin t, \sin t) = \cos t + \cos t\sin t - \sin t - 1.$$

La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $\mathbf{r}(t)$, der $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ slik at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + \cos t\sin t - \sin t - 1)\,dt = -2\pi.$$

La $\mathcal{L}$ være det rette linjestykket fra $\mathbf{r}(0) = (-1,0)$ til $\mathbf{r}(2\pi) = (2\pi - 1, 0)$. En mulig parametrisering for $\mathcal{L}$ er så gitt ved $\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(t) = (2\pi t - 1, 0)$, der $0 \leqslant t \leqslant 1$ slik at

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 0\,dt = 0.$$



La så $\mathcal{S}$ være området i xy-planet begrenset av kurven $\mathcal{C}$ og det rette linjestykket $\mathcal{L}$. Greens teorem gir så

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dA = \iint_{\mathcal{S}} dA = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der $\partial\mathcal{S}$ er randen til $\mathcal{S}$ orientert mot klokken. Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}} dA = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

8 **a)** Tetraederet T kan beskrives ved

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 2 - 2x - 2y.$$

I vårt tilfelle er div $F(x,y,z) = 2z$. Divergensteoremet gir så at

$$\begin{aligned}\iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 2\iiint_T z\,dV \\ &= 2\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-2x-2y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}(2-2x-2y)^2\,dy\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\int_0^1\left[(2-2x-2y)^3\right]_{y=0}^{1-x}dx = \frac{4}{3}\int_0^1(1-x)^3\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\left[(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x-1)^2 - \frac{\partial}{\partial z}0, -\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-1)^2 - \frac{\partial}{\partial z}(2xz)\right), \frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}2xz\right) \\ &= (0, -(2(x-1)-2x), 0) = (0,2,0).\end{aligned}$$

La $\mathcal{S}$ være flaten gitt som grafen til $z = f(x,y) = 2-2x-2y$, der $0 \leqslant y \leqslant 1-x$ og $0 \leqslant x \leqslant 1$. Legg merke til at $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$.
Siden

$$\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)dx\,dy = (2,2,1)\,dx\,dy$$

gir Stokes' teorem at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \int_0^1\int_0^{1-x} 4\,dy\,dx = 4\int_0^1(1-x)\,dx = 2.$$

$\boxed{9}$ Implisitt derivasjon med hensyn på y av $x + z + (y+z)^5 = 6$ gir

$$\frac{\partial z}{\partial y} + 5\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z)^4 = 0, \tag{7}$$

som gir at

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5(y+z)^4}{1+5(y+z)^4}.$$

Implisitt derivasjon med hensyn på x av $x + z + (y+z)^5 = 6$ gir

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} + 5\frac{\partial z}{\partial x}(y+z)^4 = 0,$$

som gir at

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+5(y+z)^4}.$$

Implisitt derivasjon med hensyn på x av ligning (7) gir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(y+z)^4 + 20\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z)^3\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

som innsatt for uttrykkene for $\partial z/\partial x$ og $\partial z/\partial y$ gir at

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1+5(y+z)^4) - \frac{20(y+z)^3}{(1+5(y+z)^4)^2} = 0.$$

Det vil si,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{20(y+z)^3}{(1+5(y+z)^4)^3}$$

som igjen gir at

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,-2,3)} = \frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}.$$