

- 1 I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (2t, 8t, -12t) = 2t(1, 4, -6)$ slik at $|\mathbf{r}'(t)| = 2t\sqrt{53}$. Dermed er buelengden til C gitt ved

$$s = \int_1^2 |\mathbf{r}'(t)| dt = 2\sqrt{53} \int_1^2 t dt = 3\sqrt{53}.$$

- 2 La $F(x, y, z) = 4(x - 1)^2 + y^2 - (z + 1)^2 - 1$. Da er

$$\nabla F(x, y, z) = (8(x - 1), 2y, -2(z + 1))$$

slik at $\nabla F(0, \sqrt{6}, 2) = (-8, 2\sqrt{6}, -6)$. Siden $\nabla F(0, \sqrt{6}, 2)$ står normalt på nivåflaten $F(x, y, z) = 0$ i punktet $(0, \sqrt{6}, 2)$ har vi at

$$\nabla F(0, \sqrt{6}, 2) \cdot (x, y - \sqrt{6}, z - 2) = -8x + 2\sqrt{6}(y - \sqrt{6}) - 6(z - 2) = 0.$$

Det vil si, en ligning for tangentplanet til $F(x, y, z) = 0$ i punktet $(0, \sqrt{6}, 2)$ er gitt ved

$$4x - \sqrt{6}y + 3z = 0.$$

- 3 Siden $h(t) = \ln t$ for $t > 0$ er en strengt voksende funksjon, er det kun nødvendig å finne den minste og den største verdien til $g(x, y) = 3 + 2xy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, for å finne den minste og den største verdien til f på samme sirkel.

En parametrisering av sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$. La $g(t) = g(\mathbf{r}(t)) = 3 + 2 \cos t \sin t = 3 + \sin 2t$, der $0 \leq t \leq 2\pi$. Siden $-1 \leq \sin 2t \leq 1$ for alle $0 \leq t \leq 2\pi$ må den minste verdien til $g(t)$ være lik $3 - 1 = 2$ og den største verdien til $g(t)$ være lik $3 + 1 = 4$.

Altså er den minste verdien til $f(x, y)$ lik $\ln 2$ og den største verdien til $f(x, y)$ lik $\ln 4 = 2 \ln 2$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

- 4 Området D er skissert i figuren til høyre.

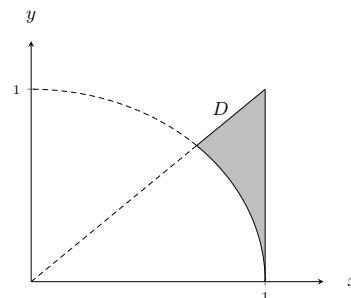
La så $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$ slik at linjen $y = x$ svarer til $\theta = \pi/4$ og linjen $x = 1$ svarer til $r = 1/\cos \theta$. Området D kan dermed beskrives som området gitt ved

$$1 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{og} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

i polarkoordinater.

Altså er

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_1^{1/\cos \theta} \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



- 5 La $u = x^2 - y^2$ og $v = xy$. Jacobideterminanten er så gitt ved

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

slik at

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

for $x^2 + y^2 \neq 0$. Området D kan beskrives ved $1 \leq u \leq 4$ og $3 \leq v \leq 5$ i uv -planet.

Legg merke til at $2(x^4 - y^4) = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ slik at

$$2(x^4 - y^4) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} = x^2 - y^2 = u.$$

Dermed er

$$\iint_D 2(x^4 - y^4) dx dy = \int_3^5 \int_1^4 2(x^4 - y^4) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_3^5 \int_1^4 u du dv = 15.$$

- 6 Ved å innføre kulekoordinater følger det at $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ svarer til $\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$ og $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ svarer til $\rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi$.

Altså er integrasjonsområdet beskrevet ved

$$0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

i kulekoordinater. Volumet som ligger under kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ og over kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{16\pi}{3} \int_1^{1/\sqrt{2}} u^3 du = \frac{4\pi}{3} [u^4]_{1/\sqrt{2}}^1 = \pi, \end{aligned}$$

der (*) fremkommer ved å benytte substitusjonen $u = \cos \varphi$.

- 7 Legg merke til at $z = x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 - 1 + y^2$.

En mulig parametrisering for flaten S er gitt ved

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (1 + r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 - 1)$$

der $0 \leq r \leq 2$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det gir at

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

slik at

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right)(r, \theta) = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r) = r(-2r \cos \theta, -2r \sin \theta, 1).$$

Dermed er

$$dS = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right)(r, \theta) \right| dr d\theta = r\sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta$$

slik at arealet av flaten er gitt ved

$$A = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$$

der den nest siste likheten fremkommer ved å benytte substitusjonen $u = 1 + 4r^2$.

- 8 La $F_1(x, y) = x^3 - y$ og $F_2(x, y) = x + y^3$ slik at $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$. Greens teorem gir i vårt tilfelle at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = 2 \iint_R dA$$

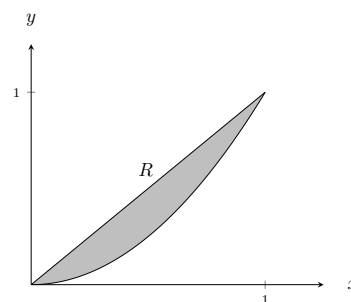
der R er området i xy -planet hvis rand er C , det vil si, $\partial R = C$.

Området R er beskrevet ved $x^2 \leq y \leq x$ og $0 \leq x \leq 1$. Dermed er

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$$

slik at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_R dA = \frac{1}{3}.$$



9 I vårt tilfelle er

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2xy - 2xy + 6z = 6z.$$

Divergensteoremet gir så at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 6 \iiint_T z dV = 0$$

der ∂T er randen til T og hvor den siste likheten følger på grunn av symmetri.

Randen til T , ∂T , består av tre flater: \mathcal{S}_{xz} , \mathcal{S}_{yz} og \mathcal{S} . Flaten \mathcal{S}_{xz} er den delen av sirkelskiven $x^2 + z^2 \leq 4$ der $x \geq 0$ og $y = 0$, og flaten \mathcal{S}_{yz} er den delen av sirkelskiven $y^2 + z^2 \leq 4$ der $x = 0$ og $y \geq 0$. For \mathcal{S}_{xz} vil $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$ og for \mathcal{S}_{yz} vil $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$.

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{xz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j}) dS = - \iint_{R_{xz}} (z - xy^2) dx dz = - \iint_{R_{xz}} z dx dz = 0$$

der R_{xz} er projeksjonen av \mathcal{S}_{xz} inn i xz -planet og hvor den andre likheten fremkommer ved å utnytte at $y = 0$ på \mathcal{S}_{xz} og den siste likheten fremkommer ved symmetri.

Videre så er

$$\iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i}) dS = - \iint_{R_{yz}} (x^2y + y^2) dy dz = - \iint_{R_{yz}} y^2 dy dz$$

der R_{yz} er projeksjonen av \mathcal{S}_{yz} inn i yz -planet og hvor den siste likheten fremkommer ved å utnytte at $x = 0$ på \mathcal{S}_{yz} . Ved å innføre polarkoordinater $y = r \sin \theta$ og $z = r \cos \theta$ følger det at

$$\iint_{R_{yz}} y^2 dy dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \sin^2 \theta d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = 2\pi.$$

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i}) dS = -2\pi.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_{\mathcal{S}_{xz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j}) dS + \iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i}) dS + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS - 2\pi = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 0 \end{aligned}$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 2\pi.$$

10 Hvis funksjonen skal være kontinuerlig i $(0, 0)$ må

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Legg merke til at

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}$$

for $x \neq 0$, mens

$$f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

for $x \neq 0$. Altså kan ikke grenseverdien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$$

eksistere. Dermed er ikke funksjonen kontinuert i $(0, 0)$.