TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 7. august 2017

1 I vårt tilfelle er

$$\nabla T(x,y,z) = \big(10e^{-z}, 5e^{-z}, -5e^{-z}(x^2+y)\big) = 5e^{-z}\big(2,1,-(x^2+y)\big)$$

slik at

$$\nabla T(1,4,8) = 5e^{-8}(2,1,-5).$$

Den retningsderiverte i punktet $(1,4,8)$ er størst når det deriveres med hensyn på retningen $\nabla T(1,4,8)$. Altså stiger temperaturen mest i retningen $\nabla T(1,4,8)$ fra punktet $(1,4,8)$.

2 Implisitt partiellderivasjon med hensyn på x på ligningen $2x^4z^2 + y^4 = x^2 - 4xy^5z$ gir

$$8x^4z^2 + 4x^4z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y^5\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Innsatt for $(x,y,z) = (1,-1,0)$ gir dette at

$$0 = 2 + 4\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1,0)}.$$

Det vil si,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1,0)} = -\frac{1}{2}.$$

3 I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (1,\cos t,\sin t)$ slik at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. Altså er

$$\widehat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\cos t,\sin t)$$

slik at

$$\widehat{\mathbf{T}}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\sin t,\cos t).$$

Dermed er krumningen gitt ved

$$\kappa(t) = \frac{|\widehat{\mathbf{T}}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{2}.$$

4 I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3y + 2y^2 + 1, 4xy - 3x)$$

slik at $\nabla f(x,y) = (0,0)$ svarer til

$$2x - 3y + 2y^2 + 1 = 0 \tag{1}$$
$$4xy - 3x = 0. \tag{2}$$

Fra (2) følger det at $x = 0$ eller $y = 3/4$. Innsatt for $x = 0$ i (1) medfører at $2y^2 - 3y + 1 = (2y-1)(y-1) = 0$ som har løsning $y = 1/2$ og $y = 1$. Innsatt for $y = 3/4$ i (1) medfører at $2x - 9/4 + 18/16 + 1 = 2x - 1/8 = 0$ som har løsning $x = 1/16$. Altså er $(0,1/2)$, $(0,1)$ og $(1/16,3/4)$ kritiske punkter til f.

Legg merke til at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4y - 3$$

slik at

$$\mathcal{D}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right)^2 = 8x - (4y-3)^2.$$

Siden

$$\mathcal{D}\left(0,\frac{1}{2}\right) = -1 < 0, \quad \mathcal{D}(0,1) = -1 < 0 \quad \text{og} \quad \mathcal{D}\left(\frac{1}{16},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 > 0$$

gir annenderiverttesten at $(0,1/2)$ og $(0,1)$ er sadelpunkter, og $(1/16,3/4)$ er et lokalt minimumspunkt til f.

$\boxed{5}$ Fra $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1$ og $0 \leqslant x \leqslant 1$ følger det at $0 \leqslant x \leqslant y^2$ og $0 \leqslant y \leqslant 1$ slik at

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{3}{1+y^3}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{3}{1+y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{1+y^3}\,dy = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2$$

der den nest siste likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = 1+y^3$.

$\boxed{6}$ Ved å benytte sylinderkoordinater kan området T beskrives ved

$$0 \leqslant z \leqslant r^3, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \quad \text{og} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

slik at

$$\begin{aligned}\iiint_T 3e^z\sqrt{x^2+y^2}\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^3} 3e^z r^2\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 3r^2(e^{r^3}-1)\,dr \\ &= 2\pi\int_0^1 e^u\,du - 2\pi = 2\pi(e-2)\end{aligned}$$

der den nest siste likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = r^3$.

$\boxed{7}$ Siden

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin z - \sin z, 0, 2x - 2x) = (0,0,0)$$

og $\mathbb{R}^3$ er enkeltsammenhengende, er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt. Altså finnes det en potensialfunksjon φ slik at $\nabla\varphi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z)$.
Dermed er

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = 2xy \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = x^2 - \cos z \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = y\sin z. \tag{5}$$

Fra (3) følger det at

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z)\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + C(y,z),$$

som partiellderivert med hensyn på y gir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = x^2 - \cos z$$

der den siste likheten følger fra å anvende (4). Dermed er

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = -\cos z$$

slik at $C(y,z) = D(z) - y\cos z$. Ved å partiellderivere $\varphi(x,y,z) = x^2y - y\cos z + D(z)$ med hensyn på z følger det at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = y\sin z + D'(z) = y\sin z$$

der den siste likheten følger fra å anvende (5). Altså er $D'(z) = 0$ og dermed er $D(z) = c$, der c er en konstant. La $c = 0$. En potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ er så gitt ved

$$\varphi(x,y,z) = x^2y - y\cos z.$$

Legg merke til at $\mathbf{r}(1) = (-1,\pi,\pi/2)$ og at $\mathbf{r}(2) = (2,2\pi,0)$. Dermed er

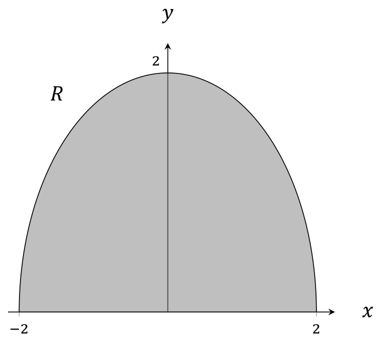
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(2,2\pi,0) - \varphi\left(-1,\pi,\frac{\pi}{2}\right) = 8\pi - 2\pi - \pi = 5\pi.$$

$\boxed{8}$ La R være den delen av sirkelskiven $x^2 + y^2 \leqslant 4$ der $y \geqslant 0$.

Da består randen til R av $\mathcal{C}$ samt det rette linjestykket $\mathcal{L}$ fra $(-2,0)$ til $(2,0)$.

La $F_1(x,y) = 3x + 2y$ og $F_2(x,y) = x + 2\sin(y^3)$. Greens teorem gir så at

$$\oint_{\partial R} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = -\iint_R dA = -2\pi$$



der den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av R er 2π og hvor ∂R er orientert mot klokken.

Siden

$$\int_{\mathcal{L}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_{-2}^{2} 3x\,dx = 0$$

og

$$\oint_{\partial R} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy + \int_{\mathcal{L}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = -2\pi$$

følger det at

$$\int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = -2\pi.$$

$\boxed{9}$ I vårt tilfelle er

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy - 2xy + 3 = 3.$$

La T være området i rommet gitt ved $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$ og $0 \leqslant z \leqslant 8$. Divergensteoremet gir så at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_T dV = 12\pi$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ peker vekk fra T og hvor den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av en ellipse med halvakser a og b er gitt ved πab slik at volumet av T er gitt ved $\pi abh = \pi\cdot 1\cdot 1/2\cdot 8 = 4\pi$.

Randen til T, ∂T, består av tre flater: $\mathcal{S}_{z=0}$, $\mathcal{S}_{z=8}$ og $\mathcal{S}$. Flaten $\mathcal{S}_{z=0}$ er flaten gitt ved $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$ der $z = 0$, og flaten $\mathcal{S}_{z=8}$ er flaten gitt ved $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$ der $z = 8$. For $\mathcal{S}_{z=0}$ er $\widehat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ og for $\mathcal{S}_{z=8}$ er $\widehat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$.

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{z=0}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS = -\iint_{R_{z=0}} x^3\, dx\, dy = 0$$

der $R_{z=0}$ er projeksjonen av $\mathcal{S}_{z=0}$ ned i xy-planet og hvor den siste likheten fremkommer ved symmetri.

Videre så er

$$\iint_{\mathcal{S}_{z=8}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS = \iint_{R_{z=8}} (x^3 + 24)\, dx\, dy = 24 \iint_{R_{z=8}} dx\, dy = 12\pi$$

der $R_{z=8}$ er projeksjonen av $\mathcal{S}_{z=8}$ ned i xy-planet og hvor den nest siste likheten fremkommer ved symmetri og den siste likheten fremkommer ved at arealet av $R_{z=8}$ er $\pi \cdot 1 \cdot 1/2 = \pi/2$.

Dermed er

$$\begin{aligned}\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_{\mathcal{S}_{z=0}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS + \iint_{\mathcal{S}_{z=8}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS \\ &= 12\pi + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 12\pi\end{aligned}$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$$

$\boxed{10}$ La $\mathcal{S}'$ være flaten gitt ved $2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 4$ der $z = 0$. Da har $\mathcal{S}'$ og $\mathcal{S}$ samme rand $\mathcal{C}$: sirkelen $x^2 + y^2 = 16$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 4$. For at orientasjonen av $\mathcal{S}'$ skal gi samme orientasjon av $\mathcal{C}$ som $\mathcal{S}$ må $\widehat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ for $\mathcal{S}'$.

Siden

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) = \left(xze^{xy} - y\cos(yz), 3z^2e^{z^3} - yze^{xy}, -(3 + x)\right)$$

gir Stokes' teorem at

$$\iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}'} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dS = -\iint_{R} (3 + x)\, dx\, dy = -3 \iint_{R} dx\, dy = -36\pi$$

der R er projeksjonen av $\mathcal{S}'$ (og $\mathcal{S}$) ned i xy-planet, og hvor den nest siste likheten fremkommer ved symmetri og den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av R er gitt ved $\pi(4^2 - 2^2) = 12\pi$.