

1 I vårt tilfelle er

$$\nabla T(x, y, z) = (10xe^{-z}, 5e^{-z}, -5e^{-z}(x^2 + y)) = 5e^{-z}(2x, 1, -(x^2 + y))$$

slik at

$$\nabla T(1, 4, 8) = 5e^{-8}(2, 1, -5).$$

Den retningsderiverte i punktet $(1, 4, 8)$ er størst når det deriveres med hensyn på retningen $\nabla T(1, 4, 8)$. Altså stiger temperaturen mest i retningen $\nabla T(1, 4, 8)$ fra punktet $(1, 4, 8)$.

2 Implisitt partiellderivasjon med hensyn på x på ligningen $2x^4z^2 + y^4 = x^2 - 4xy^5z$ gir

$$8x^3z^2 + 4x^4z \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y^5 \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Innsatt for $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ gir dette at

$$0 = 2 + 4 \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, -1, 0)}.$$

Det vil si,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, -1, 0)} = -\frac{1}{2}.$$

3 I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (1, \cos t, \sin t)$ slik at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. Altså er

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos t, \sin t)$$

slik at

$$\hat{\mathbf{T}}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\sin t, \cos t).$$

Dermed er krumningen gitt ved

$$\kappa(t) = \frac{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{2}.$$

4 I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y + 2y^2 + 1, 4xy - 3x)$$

slik at $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ svarer til

$$2x - 3y + 2y^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

$$4xy - 3x = 0. \tag{2}$$

Fra (2) følger det at $x = 0$ eller $y = 3/4$. Innsatt for $x = 0$ i (1) medfører at $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$ som har løsning $y = 1/2$ og $y = 1$. Innsatt for $y = 3/4$ i (1) medfører at $2x - 9/4 + 18/16 + 1 = 2x - 1/8 = 0$ som har løsning $x = 1/16$. Altså er $(0, 1/2)$, $(0, 1)$ og $(1/16, 3/4)$ kritiske punkter til f .

Legg merke til at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4x \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4y - 3$$

slik at

$$\mathcal{D}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right)^2 = 8x - (4y - 3)^2.$$

Siden

$$\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right) = -1 < 0, \quad \mathcal{D}(0, 1) = -1 < 0 \quad \text{og} \quad \mathcal{D}\left(\frac{1}{16}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 > 0$$

gir annenderiverttesten at $(0, 1/2)$ og $(0, 1)$ er sadelpunkter, og $(1/16, 3/4)$ er et lokalt minimumspunkt til f .

- 5 Fra $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ og $0 \leq x \leq 1$ følger det at $0 \leq x \leq y^2$ og $0 \leq y \leq 1$ slik at

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{3}{1+y^3} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{3}{1+y^3} dx dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{1+y^3} dy = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2$$

der den nest siste likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = 1 + y^3$.

- 6 Ved å benytte sylindervektor koordinater kan området T beskrives ved

$$0 \leq z \leq r^3, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{og} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

slik at

$$\begin{aligned} \iiint_T 3e^z \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^3} 3e^z r^2 dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 3r^2 (e^{r^3} - 1) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 e^u du - 2\pi = 2\pi(e - 2) \end{aligned}$$

der den nest siste likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = r^3$.

- 7 Siden

$$\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin z - \sin z, 0, 2x - 2x) = (0, 0, 0)$$

og \mathbb{R}^3 er enkeltsammenhengende, er \mathbf{F} et konservativt vektorfelt. Altså finnes det en potensialfunksjon φ slik at $\nabla\varphi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

Dermed er

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 2xy \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = x^2 - \cos z \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = y \sin z. \tag{5}$$

Fra (3) følger det at

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) dx = \int 2xy dx = x^2 y + C(y, z),$$

som partiellderivert med hensyn på y gir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = x^2 - \cos z$$

der den siste likheten følger fra å anvende (4). Dermed er

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = -\cos z$$

slik at $C(y, z) = D(z) - y \cos z$. Ved å partiellderivere $\varphi(x, y, z) = x^2 y - y \cos z + D(z)$ med hensyn på z følger det at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = y \sin z + D'(z) = y \sin z$$

der den siste likheten følger fra å anvende (5). Altså er $D'(z) = 0$ og dermed er $D(z) = c$, der c er en konstant. La $c = 0$. En potensialfunksjon til \mathbf{F} er så gitt ved

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y - y \cos z.$$

Legg merke til at $\mathbf{r}(1) = (-1, \pi, \pi/2)$ og at $\mathbf{r}(2) = (2, 2\pi, 0)$. Dermed er

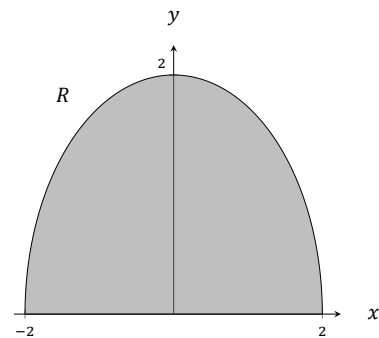
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(2, 2\pi, 0) - \varphi(-1, \pi, \frac{\pi}{2}) = 8\pi - 2\pi - \pi = 5\pi.$$

8] La R være den delen av sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 4$ der $y \geq 0$.

Da består randen til R av C samt det rette linjestykket L fra $(-2, 0)$ til $(2, 0)$.

La $F_1(x, y) = 3x + 2y$ og $F_2(x, y) = x + 2 \sin(y^3)$. Greens teorem gir så at

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = - \iint_R dA = -2\pi \end{aligned}$$



der den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av R er 2π og hvor ∂R er orientert mot klokken.

Siden

$$\int_L F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_{-2}^2 3x dx = 0$$

og

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_L F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = -2\pi \end{aligned}$$

følger det at

$$\int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = -2\pi.$$

9] I vårt tilfelle er

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2xy - 2xy + 3 = 3.$$

La T være området i rommet gitt ved $x^2 + 4y^2 \leq 1$ og $0 \leq z \leq 8$. Divergensteoremet gir så at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 3 \iiint_T dV = 12\pi$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ peker vekk fra T og hvor den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av en ellipse med halvaksler a og b er gitt ved πab slik at volumet av T er gitt ved $\pi abh = \pi \cdot 1 \cdot 1/2 \cdot 8 = 4\pi$.

Randen til T , ∂T , består av tre flater: $S_{z=0}$, $S_{z=8}$ og S . Flaten $S_{z=0}$ er flaten gitt ved $x^2 + 4y^2 \leq 1$ der $z = 0$, og flaten $S_{z=8}$ er flaten gitt ved $x^2 + 4y^2 \leq 1$ der $z = 8$. For $S_{z=0}$ er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ og for $S_{z=8}$ er $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$.

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{z=0}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS = - \iint_{R_{z=0}} x^3 dx dy = 0$$

der $R_{z=0}$ er projeksjonen av $\mathcal{S}_{z=0}$ ned i xy -planet og hvor den siste likheten fremkommer ved symmetri.

Videre så er

$$\iint_{\mathcal{S}_{z=8}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS = \iint_{R_{z=8}} (x^3 + 24) dx dy = 24 \iint_{R_{z=8}} dx dy = 12\pi$$

der $R_{z=8}$ er projeksjonen av $\mathcal{S}_{z=8}$ ned i xy -planet og hvor den nest siste likheten fremkommer ved symmetri og den siste likheten fremkommer ved at arealet av $R_{z=8}$ er $\pi \cdot 1 \cdot 1/2 = \pi/2$.

Dermed er

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_{\mathcal{S}_{z=0}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS + \iint_{\mathcal{S}_{z=8}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= 12\pi + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 12\pi \end{aligned}$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0.$$

- 10 La \mathcal{S}' være flaten gitt ved $2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4$ der $z = 0$. Da har \mathcal{S}' og \mathcal{S} samme rand \mathcal{C} : sirkelen $x^2 + y^2 = 16$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 4$. For at orientasjonen av \mathcal{S}' skal gi samme orientasjon av \mathcal{C} som \mathcal{S} må $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ for \mathcal{S}' .

Siden

$$\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) = (xze^{xy} - y \cos(yz), 3z^2e^{z^3} - yze^{xy}, -(3+x))$$

gir Stokes' teorem at

$$\iint_{\mathcal{S}} (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\mathcal{S}'} (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dS = - \iint_R (3+x) dx dy = -3 \iint_R dx dy = -36\pi$$

der R er projeksjonen av \mathcal{S}' (og \mathcal{S}) ned i xy -planet, og hvor den nest siste likheten fremkommer ved symmetri og den siste likheten fremkommer ved å utnytte at arealet av R er gitt ved $\pi(4^2 - 2^2) = 12\pi$.