TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 7. juni 2016

1 **a)** I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 5)$, slik at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$. Dermed er buelengden til $\mathcal{C}$ gitt ved

$$s = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{29}\, dt = 2\pi\sqrt{29}.$$

b) Enhetstangentvektoren $\widehat{\mathbf{T}}$ til $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$\widehat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2\sin t, 2\cos t, 5).$$

Observer at $\mathbf{r}(\pi/2) = (0, 2, 5\pi/2)$. Altså er enhetstangentvektoren til $\mathcal{C}$ i punktet $(0, 2, 5\pi/2)$ gitt ved

$$\widehat{\mathbf{T}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2, 0, 5).$$

Kurven $\mathcal{C}$ er glatt i punktet $(0, 2, 5\pi/2)$ da den er glatt overalt: en kurve er glatt dersom det fins en parametrisering $\mathbf{r}$ slik at $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ for alle t i definisjonsmengden til $\mathbf{r}$.

2 I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}(-2xy, x^2-y^2+4).$$

Observer at $x^2+y^2+4 > 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Altså har vi ingen singulære punkter. De kritiske punktene må tilfredstille

$$-2xy = 0 \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 + 4 = 0. \tag{2}$$

Fra (1) får vi at $x = 0$ eller $y = 0$. Setter vi inn for $y = 0$ i (2) får vi at $x^2 + 4 = 0$, som har ingen løsning. Altså kan ikke $y = 0$. Setter vi inn for $x = 0$ i (2) får vi at $y^2 - 4 = 0$, det vil si, $y = \pm 2$. Punktene $(0, \pm 2)$ ligger på randen, og vi har dermed ingen kritiske punkter i det indre av definisjonsmengden til f.

På randen er $x^2 + y^2 = 4$, slik at

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+4} = \frac{y}{8}.$$

La så $g(y) = y/8$, der $-2 \le y \le 2$. Da g er kontinuerlig og definert på et lukket intervall, gir ekstremalverdisetningen at g må oppnå en største og en minste verdi på intervallet $[-2, 2]$. Observer at g har ingen kritiske eller singulære punkter. De eneste kandidatene til største og minste verdi er dermed endepunktene, altså $y = -2$ og $y = 2$. Observer at $g(\pm 2) = \pm 1/4$.

Dermed er $1/4$ den største verdien og $-1/4$ den minste verdien f oppnår på sirkelskiven $x^2 + y^2 \le 4$.

3 Ved å sette inn for $(x,y) = (0,1)$ i ligningen for skalarfeltet $z(x,y)$,

$$3x^2z^4 + 2y^3z = 5x^2 + 2y^4x, \tag{3}$$

får vi at $z(0,1) = 0$. Implisitt derviasjon av (3) med hensyn på x gir

$$6xz^4 + 12x^2z^3\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 2y^4$$

som innsatt for $(x, y) = (0, 1)$ gir

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 1.$$

Implisitt derviasjon av (3) med hensyn på y gir

$$12x^2z^3\frac{\partial z}{\partial y} + 6y^2z + 2y^3\frac{\partial z}{\partial y} = 8xy^3$$

som innsatt for $(x, y) = (0, 1)$ gir

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0.$$

Altså er $\nabla z(0, 1) = (1, 0)$.

$\boxed{4}$ I vårt tilfelle er

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$$

slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{e^{2t}}(e^t\cos t, e^t\sin t) = e^{-t}(\cos t, \sin t).$$

Da $\mathbf{r}'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$ får vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

$\boxed{5}$ Observer at $\mathbf{r}(0) = (3, 0, 0)$ og at $\mathbf{r}(2\pi) = (3, 0, 10\pi)$. Da vektorfeltet er konservativt er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{L}$ er det rette linjestykket fra $(3, 0, 0)$ til $(3, 0, 10\pi)$.

En mulig parametrisering av $\mathcal{L}$ er gitt ved $\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(t) = (3, 0, 10\pi t)$ der $0 \le t \le 1$, slik at $\mathbf{r}'_{\mathcal{L}}(t) = (0, 0, 10\pi)$ og

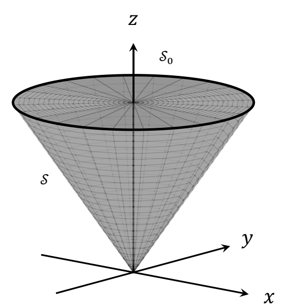
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(t)) = (0, 3\cos 10\pi t, 1 - \sin 10\pi t)\,.$$

Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(t))\cdot\mathbf{r}'_{\mathcal{L}}(t)\,dt = 10\pi\int_0^1 (1-\sin 10\pi t)\,dt = 10\pi.$$

$\boxed{6}$ Projeksjonen av T ned i xy-planet er sirkelskiven $x^2+y^2 \le 1$. Legemet T består av punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ der $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ og $x^2 + y^2 \le 1$.

Randen til T består av to flater: kjeglen $\mathcal{S}$ og sirkelskiven $\mathcal{S}_0$. Divergens-teoremet gir at



$$\begin{aligned}\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV &= \oiint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS,\end{aligned}$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV - \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS.$$

I vårt tilfelle er $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z - x + 2$, slik at

$$\begin{aligned}
\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(z-x+2)\,dz\right)dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{5}{2} + x(\sqrt{x^2+y^2}-1) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} + r(r-1)\cos\theta - \frac{1}{2}r^2 - 2r\right)r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 (5\pi - \pi r^2 - 4\pi r)r\,dr \\
&= \frac{11}{12}\pi.
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{k} = 2z$ og $z = 1$ på $\mathcal{S}_0$ får vi at

$$\iint_{\mathcal{S}_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = 2\iint_{\mathcal{S}_0} dS = 2\,\text{areal}(\mathcal{S}_0) = 2\pi.$$

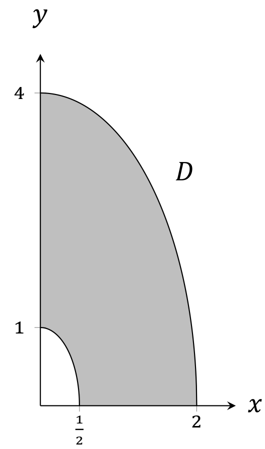
Dermed er

$$\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV - \iint_{\mathcal{S}_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \frac{11}{12}\pi - 2\pi = -\frac{13}{12}\pi.$$

$\boxed{7}$ Området D er skissert i figuren til høyre.

Vi innfører variabelskiftet $x = u\cos v$ og $y = 2u\sin v$, der $1/2 \le u \le 2$ og $0 \le v \le \pi/2$. Det gir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v \\ 2\sin v & 2u\cos v\end{vmatrix} = 2u.$$



Altså er

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{4x^2+y^2}\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_{1/2}^{2}\frac{u\cos v}{4u^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_{1/2}^{2}\cos v\,du\,dv \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Stokes' teorem gir at

$$\oint_{\partial\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker oppover. I vårt tilfelle er

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y & e^z & e^x\end{vmatrix} = (-e^z, -e^x, -e^y),$$

og

$$\widehat{\mathbf{N}}\,dS = (-2x, 0, 1)\,dx\,dy,$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^1 \int_0^2 (2xe^z - e^y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 (2xe^{x^2} - e^y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 [e^{x^2} - xe^y]_0^2\, dy = \int_0^1 (e^4 - 2e^y - 1)\, dy = e^4 - 2e + 1$$

der vi har brukt at $z = x^2$ på $\mathcal{S}$.

$\boxed{9}$ Sirkelen $(x-1)^2 + y^2 = 1$ kan beskrives med polarkoordinater:

$$\begin{aligned} (r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta &= 1 \\ r^2 - 2r\cos\theta + 1 &= 1 \\ r(r - 2\cos\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Det vil si, $r = 2\cos\theta$, der $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ ettersom $0 \le x \le 2$ og $-1 \le y \le 1$.
En mulig parametrisering av $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{4 - r^2}\right),$$

der $0 \le r \le 2\cos\theta$ og $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(r,\theta) &= \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{r}{\sqrt{4 - r^2}}\right) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(r,\theta) &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{aligned}$$

får vi at

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right)$$

slik at

$$dS = \left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r,\theta)\right| = \sqrt{\frac{r^4}{4 - r^2} + r^2}\, dr\, d\theta = \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\, dr\, d\theta.$$

Altså er

$$\begin{aligned} \text{areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\, dr\, d\theta \\ &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_4^{4\sin^2\theta} \frac{du}{\sqrt{u}}\, d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \int_4^{4\sin^2\theta} \frac{du}{\sqrt{u}}\, d\theta \\ &= -8\int_0^{\pi/2} (\sin\theta - 1)\, d\theta = 4\pi - 8, \end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 4 - r^2$.