

- 1 Observer at $f(0, 1) = 0$. En ligning for tangentplanet til grafen til f i punktet $(0, 1, 0)$ er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1) - z = 0.$$

I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos(e^x \ln y) e^x \ln y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos(e^x \ln y) \frac{e^x}{y}\end{aligned}$$

slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1.$$

Dermed er en ligning for tangentplanet i punktet $(0, 1, 0)$ til grafen til f gitt ved

$$y - 1 - z = 0.$$

- 2 I vårt tilfelle er

$$\nabla h(x, y) = \frac{90}{1 + x^2 + y^2} (1 - x^2 + y^2, -2xy)$$

slik at $\nabla h(2, 1) = (-5, -10)$. Skalarfeltet h stiger mest i retningen gitt ved $\nabla h(2, 1) = (-5, -10)$, da det er retningen som gir størst retningsderivert til h .

- 3 Vi finner projeksjonen av skjæringskurven ned i xy -planet:

$$2 - x^2 - 4y^2 = 1 - 2x - 4y \quad \text{det vil si} \quad (x - 1)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

Dette beskriver en ellipse med sentrum i $(1, 1/2)$ og halvaksler $\sqrt{3}$ (i x -retning) og $\sqrt{3}/2$ (i y -retning). Ved å utnytte at $z = 1 - 2x - 4y$ får vi at en mulig parametrisering for skjæringskurven mellom S og grafen til f er gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \left(1 + \sqrt{3} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 1 - 2(1 + \sqrt{3} \cos t) - 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\right)\right) \\ &= \left(1 + \sqrt{3} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, -3 - 2\sqrt{3}(\cos t + \sin t)\right),\end{aligned}$$

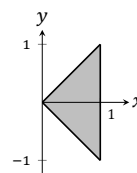
der $0 \leq t \leq 2\pi$.

- 4 Integrasjonsområdet er skissert i figuren til høyre.

Fra ulikhetene $|y| \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$ finner vi at det samme området kan beskrives ved ulikhetene $-x \leq y \leq x$ og $0 \leq x \leq 1$.

Dermed er

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + 2y) dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x (x + 2y) dy dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$



5 La $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)/(x^2 + y^2)$. Observer at $f(x, 0) = 1 \rightarrow 1$ når $x \rightarrow 0$, og at $f(0, y) = 3 \rightarrow 3$ når $y \rightarrow 0$. Altså får vi forskjellige verdier for $f(x, y)$ når $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ avhengig av hvilken vei vi følger inn mot origo. Dermed kan ikke grenseverdien eksistere.

6 La $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. De nødvendige og tilstrekkelige betingelsene for største og minste verdi er:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{og} \quad g(x, y, z) = 0.$$

I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 6z) \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Fra $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ får vi

$$x = \lambda x \tag{1}$$

$$2y = \lambda y \tag{2}$$

$$3z = \lambda z. \tag{3}$$

Anta at $x \neq 0$. Da gir (1) at $\lambda = 1$, som innsatt i (2) og (3) gir $y = z = 0$. Fra $g(x, 0, 0) = x^2 - 4 = 0$ får vi at $x = \pm 2$. Observer at $f(\pm 2, 0, 0) = 4$.

Anta at $y \neq 0$. Da gir (2) at $\lambda = 2$, som innsatt i (1) og (3) gir $x = z = 0$. Fra $g(0, y, 0) = y^2 - 4 = 0$ får vi at $y = \pm 2$. Observer at $f(0, \pm 2, 0) = 8$.

Anta at $z \neq 0$. Da gir (3) at $\lambda = 3$, som innsatt i (1) og (2) gir $x = y = 0$. Fra $g(0, 0, z) = z^2 - 4 = 0$ får vi at $z = \pm 2$. Observer at $f(0, 0, \pm 2) = 12$.

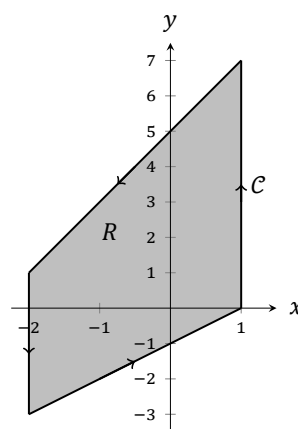
Altså er 12 den største verdien f tar på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7 Kurven C og det tilhørende området R er skissert i figuren til høyre.

Linjestykket fra $(-2, 1)$ til $(1, 7)$ kan beskrives som grafen til $y = 2x + 5$, der $-2 \leq x \leq 1$. Linjestykket fra $(-2, -3)$ til $(1, 0)$ kan beskrives som grafen til $y = x - 1$, der $-2 \leq x \leq 1$.

Området R er så beskrevet ved ulikhetene $x - 1 \leq y \leq 2x + 5$ og $-2 \leq x \leq 1$. Greens teorem gir så at

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + 2x \, dy &= \iint_R (2 - x) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^1 \int_{x-1}^{2x+5} (2 - x) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^1 (12 - 4x - x^2) \, dx \\ &= 39. \end{aligned}$$



8 For å finne z -verdien der paraboloiden og kuleflaten skjærer hverandre, bruker vi at $2z = x^2 + y^2$ slik at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z + z^2 = 3 \quad \text{det vil si} \quad (z + 3)(z - 1) = 0.$$

Altså er $z = -3$ eller $z = 1$. Paraboloiden gir kun positive verdier for z , så vi kan utelukke $z = -3$. Fra $2z = x^2 + y^2$ får vi at $z = 1$ gir at $x^2 + y^2 = 2$. Altså er projeksjonen av skjæringskurven mellom paraboloiden og kuleflaten ned i xy -planet en sirkel med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$.

La \mathcal{S} være den delen av paraboloiden $z = (x^2 + y^2)/2$ som ligger innenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. En mulig parametrisering av \mathcal{S} er gitt ved

$$\mathbf{r}(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{1}{2}r^2 \right),$$

der $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det gir at

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(r, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, r) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(r, \theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)\end{aligned}$$

slik at

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-r^2 \cos \theta, -r^2 \sin \theta, r).$$

Altså er

$$dS = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r, \theta) \right| dr d\theta = r\sqrt{r^2 + 1} dr d\theta.$$

Dermed er

$$\text{areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \pi \int_1^3 \sqrt{u} du = \frac{2}{3}\pi(3^{3/2} - 1),$$

der vi har brukt substitusjonen $u = r^2 + 1$.

9 a) Gitt at $\mathbf{G}(x, y, z) = (0, H(x, y, z), 0)$, så er

$$\text{curl } \mathbf{G}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H(x, y, z) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z), 0, \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z)\right)$$

som innsatt i ligningen $\text{curl } \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) = (-x, 0, 2x + z)$ gir

$$\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z) = x \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z) = 2x + z. \tag{5}$$

Fra (4) får vi at

$$H(x, y, z) = \int \frac{\partial H}{\partial z} dz = \int x dz = xz + C(x, y)$$

som innsatt i (5) gir at

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, y) = 2x.$$

Altså er $C(x, y) = x^2 + D(y)$. Dermed er $H(x, y, z) = x(x + z) + D(y)$, slik at

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (0, H(x, y, z), 0) = (0, x(x + z) + D(y), 0)$$

er et vektorpotensial til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, 0, 2x + z)$.

b) Fra a) vet vi at \mathbf{G} er et vektorpotensial til vektorfeltet \mathbf{F} , som gir ved Stokes' teorem at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\mathcal{S}} \text{curl } \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\partial \mathcal{S}$ er randen til \mathcal{S} orientert mot urviseren sett ovenfra.

På ∂S vet vi at $x^2 + y^2 = 3$, slik at $z = x^2 + y^2 + x - 3 = x$. Altså ligger ∂S i planet $z = x$. Prosjeksjonen av ∂S ned i xy -planet er gitt ved $x^2 + y^2 = 3$.

La S' være flaten gitt ved $z = x$, der $x^2 + y^2 \leq 3$. Da gir Stokes' teorem at

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S'} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ til S' peker oppover.

I tilfellet for S' er

$$\hat{\mathbf{N}} \, dS = (-1, 0, 1) \, dx \, dy$$

slik at

$$\iint_{S'} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} (3x + z) \, dx \, dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} 4x \, dx \, dy = 0,$$

der vi har brukt at $z = x$ og hvor den siste likheten følger av symmetri. Altså er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0.$$

