NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 10. august 2016

1 Observer at $f(0,1) = 0$. En ligning for tangentplanet til grafen til f i punktet $(0,1,0)$ er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1) - z = 0.$$

I vårt tilfelle er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(e^x \ln y)e^x \ln y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(e^x \ln y)\frac{e^x}{y}$$

slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1.$$

Dermed er en ligning for tangentplanet i punktet $(0,1,0)$ til grafen til f gitt ved

$$y - 1 - z = 0.$$

2 I vårt tilfelle er

$$\nabla h(x,y) = \frac{90}{(1+x^2+y^2)^2}(1-x^2+y^2, -2xy)$$

slik at $\nabla h(2,1) = (-5,-10)$. Skalarfeltet h stiger mest i retningen gitt ved $\nabla h(2,1) = (-5,-10)$, da det er retningen som gir størst retningsderivert til h.

3 Vi finner projeksjonen av skjæringskurven ned i xy-planet:

$$2 - x^2 - 4y^2 = 1 - 2x - 4y \quad \text{det vil si} \quad (x-1)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

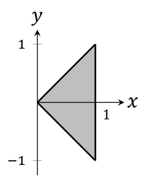
Dette beskriver en ellipse med sentrum i $(1, 1/2)$ og halvakser $\sqrt{3}$ (i x-retning) og $\sqrt{3}/2$ (i y-retning). Ved å utnytte at $z = 1 - 2x - 4y$ får vi at en mulig parametrisering for skjæringskurven mellom $\mathcal{S}$ og grafen til f er gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \left(1 + \sqrt{3}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, 1 - 2(1+\sqrt{3}\cos t) - 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)\right) \\ &= \left(1 + \sqrt{3}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, -3 - 2\sqrt{3}(\cos t + \sin t)\right),\end{aligned}$$

der $0 \le t \le 2\pi$.

4 Integrasjonsområdet er skissert i figuren til høyre.

Fra ulikhetene $|y| \le x \le 1$ og $-1 \le y \le 1$ finner vi at det samme området kan beskrives ved ulikhetene $-x \le y \le x$ og $0 \le x \le 1$.



Dermed er

$$\int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1}(x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-x}^{x}(x+2y)\,dy\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

5 La $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)/(x^2 + y^2)$. Observer at $f(x,0) = 1 \to 1$ når $x \to 0$, og at $f(0,y) = 3 \to 3$ når $y \to 0$. Altså får vi forskjellige verdier for $f(x,y)$ når $(x,y) \to (0,0)$ avhengig av hvilken vei vi følger inn mot origo. Dermed kan ikke grenseverdien eksistere.

6 La $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. De nødvendige og tilstrekkelige betingelsene for største og minste verdi er:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \quad \text{og} \quad g(x,y,z) = 0.$$

I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z) \quad \text{og} \quad \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

Fra $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ får vi

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda x && (1)\\
2y &= \lambda y && (2)\\
3z &= \lambda z. && (3)
\end{aligned}
$$

Anta at $x \neq 0$. Da gir (1) at $\lambda = 1$, som innsatt i (2) og (3) gir $y = z = 0$. Fra $g(x,0,0) = x^2 - 4 = 0$ får vi at $x = \pm 2$. Observer at $f(\pm 2, 0, 0) = 4$.

Anta at $y \neq 0$. Da gir (2) at $\lambda = 2$, som innsatt i (1) og (3) gir $x = z = 0$. Fra $g(0,y,0) = y^2 - 4 = 0$ får vi at $y = \pm 2$. Observer at $f(0, \pm 2, 0) = 8$.

Anta at $z \neq 0$. Da gir (3) at $\lambda = 3$, som innsatt i (1) og (2) gir $x = y = 0$. Fra $g(0,0,z) = z^2 - 4 = 0$ får vi at $z = \pm 2$. Observer at $f(0, 0 \pm 2) = 12$.

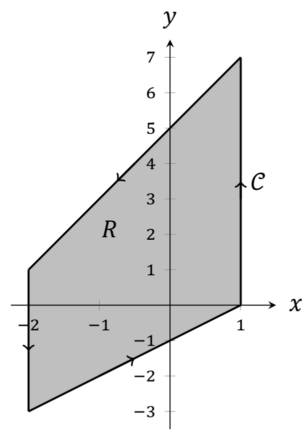
Altså er 12 den største verdien f tar på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7 Kurven $\mathcal{C}$ og det tilhørende området R er skissert i figuren til høyre.

Linjestykket fra $(-2,1)$ til $(1,7)$ kan beskrives som grafen til $y = 2x + 5$, der $-2 \leq x \leq 1$. Linjestykket fra $(-2,-3)$ til $(1,0)$ kan beskrives som grafen til $y = x - 1$, der $-2 \leq x \leq 1$.

Området R er så beskrevet ved ulikhetene $x - 1 \leq y \leq 2x + 5$ og $-2 \leq x \leq 1$. Greens teorem gir så at

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy &= \iint_R (2 - x)\,dx\,dy\\
&= \int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{2x+5} (2 - x)\,dy\,dx\\
&= \int_{-2}^{1} (12 - 4x - x^2)\,dx\\
&= 39.
\end{aligned}
$$



8 For å finne z-verdien der paraboloiden og kuleflaten skjærer hverandre, bruker vi at $2z = x^2 + y^2$ slik at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z + z^2 = 3 \quad \text{det vil si} \quad (z+3)(z-1) = 0.$$

Altså er $z = -3$ eller $z = 1$. Paraboloiden gir kun positive verdier for z, så vi kan utelukke $z = -3$. Fra $2z = x^2 + y^2$ får vi at $z = 1$ gir at $x^2 + y^2 = 2$. Altså er projeksjonen av skjæringskurven mellom paraboloiden og kuleflaten ned i xy-planet en sirkel med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$.

La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = (x^2 + y^2)/2$ som ligger innenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. En mulig parametrisering av $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{2}r^2 \right),$$

der $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det gir at

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

slik at

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, r).$$

Altså er

$$dS = \left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)(r,\theta)\right| dr\, d\theta = r\sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta.$$

Dermed er

$$\text{areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta = \pi\int_1^3 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}\pi(3^{3/2}-1),$$

der vi har brukt substitusjonen $u = r^2 + 1$.

$\boxed{9}$ **a)** Gitt at $\mathbf{G}(x,y,z) = (0, H(x,y,z), 0)$, så er

$$\operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H(x,y,z) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z), 0, \frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

som innsatt i ligningen $\operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) = (-x, 0, 2x+z)$ gir

$$\frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z) = x \tag{4}$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z) = 2x + z. \tag{5}$$

Fra (4) får vi at

$$H(x,y,z) = \int \frac{\partial H}{\partial z}\, dz = \int x\, dz = xz + C(x,y)$$

som innsatt i (5) gir at

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = 2x.$$

Altså er $C(x,y) = x^2 + D(y)$. Dermed er $H(x,y,z) = x(x+z) + D(y)$, slik at

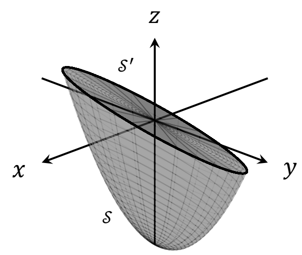
$$\mathbf{G}(x,y,z) = (0, H(x,y,z), 0) = (0, x(x+z) + D(y), 0)$$

er et vektorpotensial til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (-x, 0, 2x+z)$.

b) Fra **a)** vet vi at $\mathbf{G}$ er et vektorpotensial til vektorfeltet $\mathbf{F}$, som gir ved Stokes' teorem at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r},$$

der $\partial\mathcal{S}$ er randen til $\mathcal{S}$ orientert mot urviseren sett ovenfra.



På $\partial\mathcal{S}$ vet vi at $x^2 + y^2 = 3$, slik at $z = x^2 + y^2 + x - 3 = x$. Altså ligger $\partial\mathcal{S}$ i planet $z = x$. Projeksjonen av $\partial\mathcal{S}$ ned i xy-planet er gitt ved $x^2 + y^2 = 3$.

La $\mathcal{S}'$ være flaten gitt ved $z = x$, der $x^2 + y^2 \leq 3$. Da gir Stokes' teorem at

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}'} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ til $\mathcal{S}'$ peker oppover.

I tilfellet for $\mathcal{S}'$ er

$$\widehat{\mathbf{N}}\, dS = (-1, 0, 1)\, dx\, dy$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}'} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{x^2+y^2\leq 3} (3x + z)\, dx\, dy = \iint_{x^2+y^2\leq 3} 4x\, dx\, dy = 0,$$

der vi har brukt at $z = x$ og hvor den siste likheten følger av symmetri. Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$$