# TMA4105 Matematikk 2 – 2015-08-13

***Løsning***

Dette er versjon 1.0.

## Oppgave 1

Vi får $\mathbf{r}'(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, slik at $|\mathbf{r}'(t)|^2 = 5t^2$, og dermed $ds = \sqrt{5}\,t\,dt$, så buelengden blir $\int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,t\,dt = 2\sqrt{5}\pi^2$.

## Oppgave 2

Vi kan bruke differensialet: $2x\,dx + 2y\,dy - e^{xz}(z\,dx + x\,dz) - \cos y\,dy = 0$. I det gitte punktet blir det $2\,dx - dz - dy = 0$. Nå setter vi inn $dx = x - 1$, $dy = y$ og $dz = z$, og får ligningen $2(x-1) - z - y = 0$ for tangentplanet. Vi rydder litt, og skriver $2x - y - z = 2$.

Setter vi inn $y = z = 0{,}1$ og løser for $x$, får vi $x = 1{,}1$.

## Oppgave 3

**a.** Vi får $f_x = 4(x - x^3)$ og $f_y = 2y$, så kritiske punkter er gitt ved $x = x^3$ og $y = 0$, altså $(0,0)$, $(1,0)$ og $(-1,0)$.

Videre blir $f_{xx} = 4 - 12x^2$, $f_{yy} = 2$ og $f_{xy} = 0$, så $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 - 24x^2$.

I $(x,y) = (0,0)$ blir $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0$, og $f_{xx} = 4 > 0$, så $(0,0)$ er et lokalt minimum.

I $(x,y) = (\pm 1, 0)$ blir $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -16 < 0$, så $(\pm 1, 0)$ er sadelpunkter.

**b.** For Lagrangefunksjonen $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^4 + y^2 - 4)$ blir $L_x = 4(x - x^3) + 4\lambda x^3$, $L_y = 2(1+\lambda)y$ og $L_\lambda = x^4 + y^2 - 4$.

I et kritisk punkt er $L_y = 0$, så $y = 0$ eller $\lambda = -1$.

For $y = 0$ gir $L_\lambda = 0$ at $x^4 = 4$, så $x^2 = 2$, og $f(x,y) = 0$.

Dersom i stedet $\lambda = -1$, gir $L_x = 0$ at $x = 2x^3$, så $x = 0$ eller $x^2 = \frac{1}{2}$.

For $x = 0$ gir $L_\lambda = 0$ at $y^2 = 4$, så $f(x,y) = 4$.

For $x^2 = \frac{1}{2}$ blir $x^4 = \frac{1}{4}$, og $L_\lambda = 0$ gir at $y^2 = 4 - \frac{1}{4}$, så $f(x,y) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{4} = 4\frac{1}{2}$.

Kurven $x^4 + y^2 = 4$ er en lukket og begrenset mengde, og $f$ er kontinuerlig, så $f$ oppnår både maksimum og minimum på kurven. Disse må være blant punktene vi har funnet, og vi slutter at minste verdi for $f$ på kurven er $0$, mens største verdi for $f$ på kurven er $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

*Alternativt* (og enklere) kan vi merke oss at om $y^2 = 4 - x^4$ så er $f(x,y) = 2x^2 + 4 - 2x^4 = g(x^2)$, der $g(t) = 2t + 4 - 2t^2$. Vi må altså finne største og minste verdi for $g(t)$ for $t \in [0,2]$ (siden $x^4 \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 2$). Nå er $g'(t) = 2 - 4t = 0$ for $t = \frac{1}{2}$. Vi må også undersøke verdien i endepunktene $t = 0$ og $t = 2$.

Vi finner $g(0) = 4$, $g(\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}$ og $g(2) = 0$, og konklusjonen blir som over.

## Oppgave 4

Vi regner ut integralet over kvartsirkelskiven $Q$ og kvadratet $K$, og trekker fra hverandre:

$$\begin{aligned}
\iint_Q (2x + y^2)\,dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r\cos\theta + r^2\sin^2\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{2}{3} \cdot 2^3 \cos\theta + \frac{1}{4} \cdot 2^4 \sin^2\theta\Big)\,d\theta \\
&= \frac{16}{3} + \pi,
\end{aligned}$$

og

$$\iint_K (2x+y^2)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (2x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 (1+y^2)\,dy = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

så

$$\iint_D (2x+y^2)\,dA = \frac{16}{3}+\pi-\frac{4}{3} = 4+\pi.$$

**Oppgave 5**

Vi får

$$dS = \sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

Projeksjonen $D$ av $S$ i $xy$-planet er gitt ved $x^2+y^2 \leqslant 1$, og dermed blir arealet

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\Big[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

**Oppgave 6**

**a.** Legemet $T$ er gitt ved $x^2+3y^2 \leqslant z \leqslant 4-(3x^2+y^2)$, og projeksjonen av dette i $xy$-planet er rett og slett gitt ved $x^2+3y^2 \leqslant 4-(3x^2+y^2)$, altså $x^2+y^2 \leqslant 1$. Vi skriver $D$ for denne, og finner at volumet av $T$ blir

$$\begin{aligned}\iint_D \Big(4-(3x^2+y^2)-(x^2+3y^2)\Big)\,dA &= 4\iint_D (1-x^2-y^2)\,dA \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta = 8\pi\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big) = 2\pi.\end{aligned}$$

**b.** $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, og divergensteoremet gir derfor

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = 0,$$

så vi trenger bare regne ut det ene av de to integralene.

For den øverste flaten $S_1$ får vi

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}\Big)\,dx\,dy = (6x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dx\,dy,$$

og dermed

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \iint_D (2\mathbf{i}+y^2\mathbf{k})\cdot(6x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dx\,dy = \iint_D (12x+y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (12r\cos\theta + r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(4\cos\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\Big)\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}, \text{ og dermed også}\end{aligned}$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\frac{\pi}{4}.$$

**c.** Det viser seg at $\operatorname{curl}\mathbf{G} = -\mathbf{F}$, og siden $C$ er randkurven til $S_1$, blir

$$\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\frac{\pi}{4}$$

takket være Stokes' teorem og svaret fra punkt **a**.

Siden normalvektoren på $S_1$ peker oppover, gjelder dette når $C$ er orientert mot klokka sett ovenfra. Om vi hadde brukt $S_2$ i stedet, ville vi fått motsatt orientering på $C$, og motsatt fortegn på svaret.

### Oppgave 7

**a.** Dersom $D$ er sirkelskiven $(r-2)^2 + z^2 \leqslant 1$ i $rz$-planet, blir

$$\operatorname{volum} T = \iint_D \int_0^{\pi/2} r\,d\theta\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\iint_D r\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\iint_D (r-2+2)\,dr\,dz,$$

der integralet av $r-2$ blir null fordi $D$ er symmetrisk om linjen $r=2$, mens $r-2$ er antisymmetrisk. Så

$$\operatorname{volum} T = \frac{\pi}{2}\iint_D 2\,dr\,dz = \pi \operatorname{areal} D = \pi^2.$$

*Som alternativ til symmetriargumentet* kan man benytte polarkoordinater i $rz$-planet, sentrert på $(r,z) = (2,0)$: Altså $r = 2 + r'\cos\theta$ og $z = r'\sin\theta$, som gir

$$\iint_D r\,dr\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2 + r'\cos\theta)\,r'\,dr'\,d\theta = 2\pi,$$

og sette det inn i regningen ovenfor.

**b.** De gitte opplysningene gir $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2$, så divergensteoremet gir

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{D_x} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{D_y} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 2\operatorname{volum} T = 2\pi^2,$$

der $D_x$ og $D_y$ er de to flate endestykkene til $T$ (der $x=0$ og $y=0$, henholdsvis). På $D_x$ er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$ og $x=0$, som gir $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = 0$. På $D_y$ er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$ og $y=0$, som gir $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = -1$. Siden $D_y$ er en sirkelskive med radius 1, blir

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= 2\pi^2 - \iint_{D_x} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS - \iint_{D_y} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS \\ &= 2\pi^2 - 0 - (-\pi) = 2\pi^2 + \pi.\end{aligned}$$