TMA4105 Matematikk 2 – 2014-06-03

Løsning

Dette er versjon 1.2.

Oppgave 1

Direkte utregning gir $\nabla f = (-\sin x, 3ze^{3yz}, 3ye^{3yz})$ og derfor $\nabla f(\pi, 0, 1) = (0, 3, 0)$. Den retningsderiverte er størst i gradientens retning, altså $(0, 1, 0)$. Verdien i den retningen blir $(0, 1, 0) \cdot \nabla f(\pi, 0, 1) = 3$.

Oppgave 2

Vi deriverer: $dx = 6(t-1)\,dt$, $dy = 6(2t-1)^{1/2}$ og dermed $ds^2 = dx^2 + dy^2 = 36\big((t-1)^2 + 2t - 1\big)\,dt^2 = 36t^2\,dt^2$, altså $ds = 6t\,dt$. Buelengden blir

$$s = \int_1^2 6t\,dt = \Big[3t^2\Big]_{t=1}^2 = 9.$$

Oppgave 3

Skriv $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6$, så bibetingelsen har formen $g(x, y) = 0$. Lagranges multiplikatormetode gir ligningen $\nabla f = \lambda \nabla g$, altså

$$y = 6\lambda x, \quad x = 2\lambda y.$$

Den siste ligningen gir $\lambda = x/(2y)$. Vi setter det inn i den første og forenkler til $y^2 = 3x^2$. Det setter vi inn i bibetingelsen $3x^2 + y^2 = 6$, forenkler, og får $x^2 = 1$. Dermed må $x = \pm 1$ og $y = \pm\sqrt{3}x$, som gir fire kritiske punkter $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ og $(-1, -\sqrt{3})$. I disse fire punktene blir verdien av $f(x, y) = xy$ henholdsvis $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ og $\sqrt{3}$.

I utledningen dividerte vi med y. Men vi ser at $y = 0$ gir $x = 0$, og bibetingelsen $3x^2 + y^2 = 6$ holder ikke. Så det er ikke flere kritiske punkter, og største og minste verdi til f på kurven er derfor $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$.

Alternativt: Man kan parametrisere kurva $3x^2 + y^2 - 6$ som $x(t) = \sqrt{2}\cos(t)$, $y(t) = \sqrt{6}\sin(t)$ for $0 \leqslant t < 2\pi$. Om $z(t) := f(x(t), y(t)) = 2\sqrt{3}\cos(t)\sin(t)$ får vi $z'(t) = 2\sqrt{3}\cos(2t)$, som har nullpunkter i $t = \pi/4$, $t = 3\pi/4$, $t = 5\pi/4$ og $t = 7\pi/4$. I disse punktene har z verdi henholdsvis $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$. Altså har z, og dermed også f, maksimal- og minimalverdi $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$.

Oppgave 4

Skriv F_1 og F_2 for komponentene til $\mathbf{F}$. Vi sjekker om $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$. Direkte utregning gir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2},$$

og siden $\mathbf{F}$ er definert i hele planet (som er enkeltsammenhengende), er feltet konservativt.

En potensialfunksjon ϕ må oppfylle $\partial_x \phi = F_1$ og $\partial_y \phi = F_2$. Den første av disse gir

$$\phi(x, y) = \int F_1(x, y)\,dx = \int \frac{y}{1 + x^2y^2}\,dx = \arctan(xy) + C_1(y).$$

Tilsvarende utregning med F_2 gir at

$$\phi(x, y) = \arctan(xy) + C_2(x),$$

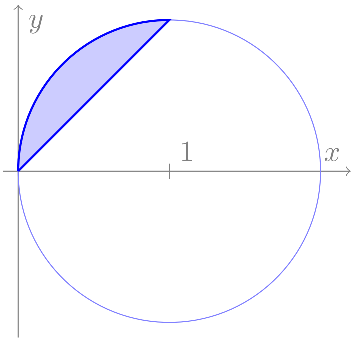
slik at $C_1(y) = C_2(x) = C$, der C er en konstant som vi kan sette lik 0. Direkte utregning av gradienten viser at dette er en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$.

Vi kunne hoppet over første del av løsningen, siden eksistensen av en potensialfunksjon viser – per definisjon – at $\mathbf{F}$ er konservativt.

Siden kurven $\mathcal{C}$ starter i $(0,0)$ og ender i $(1,1)$, blir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr = \phi(1,1) - \phi(0,0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 5



a. Nedre integrasjonsgrense i det innerste integralet tilsvarer $x = 1-\sqrt{1-y^2}$. Det impliserer $(x-1)^2 = 1-y^2$, eller $(x-1)^2+y^2 = 1$, som er ligningen for en sirkel med sentrum i $(1,0)$ og radius 1. Siden $x \leqslant 1$ og $y \geqslant 0$ er dette øvre venstre kvartsirkel. Den andre integrasjonsgrensen er et segment av linjen $x = y$, fra $(0,0)$ til $(1,1)$. Dette er korden som spenner over samme kvartsirkel. Figur til høyre.

b. I integrasjonsområdet ligger y over linjen $y = x$ og under sirkelen $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Løser vi den siste ligningen og bruker $y \geqslant 0$ får vi $y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$, så integralet blir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} x^4 y \, dy \, dx &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 x^4 \big((2x - x^2) - x^2\big) \, dx \\ &= \int_0^1 (x^5 - x^6) \, dx = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{42}.\end{aligned}$$

Oppgave 6

a. Divergensen blir $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 1 + (3y^2 - 1) = 3(x^2 + y^2)$.

b. Den delen av flaten som ligger over xy-planet er gitt ved $z \geqslant 0$, altså $\ln(2 - (x^2+y^2)^2) \geqslant 0$, ekvivalent $2 - (x^2+y^2)^2 \geqslant 1$, det vil si at (x,y) ligger i sirkelskiven $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Vi bruker divergensteoremet til å regne ut flateintegralet. Sirkelskiven $\mathcal{D}$ gitt ved $x^2 + y^2 \leqslant 1$ og $z = 0$ danner en lukket flate sammen med $\mathcal{S}$, og den kombinerte flaten er overflaten til et legeme som vi kan kalle T. Divergensteoremet kan skrives

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS$$

siden $-\mathbf{k}$ er enhetsnormalen på $\mathcal{D}$ som peker ut av T.

På $\mathcal{D}$ er $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (3y^2 - 1)z = 0$, så det siste integralet er null, og vi står igjen med

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iiint_T 3(x^2 + y^2) \, dV \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \ln(2 - (x^2+y^2)^2) \cdot 3(x^2 + y^2) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln(2 - r^4) \cdot 3r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= 6\pi \int_0^1 \ln(2 - r^4) \cdot r^3 \, dr.\end{aligned}$$

I dette integralet passer det å substituere $u = 2 - r^4$, så $du = -4r^3\,dr$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\tfrac{6}{4}\pi \int_2^1 \ln u\, du = \tfrac{3}{2}\pi \Big[u \ln u - u\Big]_{u=1}^{2} = \tfrac{3}{2}\pi(2\ln 2 - 1).$$

Oppgave 7

Ved Stokes' teorem er

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der C er randkurven til $\mathcal{S}$. I dette tilfellet er C kvadratet med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ og $(0,1)$ i xy-planet. I xy-planet er også $z = 0$, så $\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i}$. Langs de to vertikale sidene (altså parallelle med y-aksen) til C blir derfor $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ siden $\mathbf{r}$ er parallell med $\mathbf{j}$ der. Vi står igjen med

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 e^{x\cdot 0}\, dx + \int_1^0 e^{x\cdot 1}\, dx = \int_0^1 1\, dx + \int_1^0 e^x\, dx = 1 + 1 - e = 2 - e.$$

Alternativt: Vi kan bruke Stokes' teorem igjen med flaten $\tilde{\mathcal{S}} = \{(x,y,0) \;:\; 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, som har enhetsnormal $\mathbf{k}$. Siden $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \partial_x(\sin z^3) - \partial_y(e^{xy}) = -xe^{xy}$ på $\tilde{\mathcal{S}}$ blir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS = \int_0^1 \int_0^1 -xe^{xy}\, dy\, dx = \int_0^1 (1 - e^x)\, dx = 2 - e.$$

Oppgave 8

Den delen som ligger over xy-planet er gitt i kulekoordinater ved $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Vi finner

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{3+2\cos\phi} R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (3 + 2\cos\phi)^3 \sin\phi\, d\phi. \end{aligned}$$

I dette integralet passer det å substituere $u = 3 + 2\cos\phi$, som gir $du = -2\sin\phi\, d\phi$:

$$V = -\frac{\pi}{3} \int_5^3 u^3\, du = \frac{\pi}{12}(5^4 - 3^4) = \frac{136}{3}\pi.$$