TMA4105 Matematikk 2 – 2014-08-07

Løsning

Dette er versjon 0.4.

Oppgave 1

a. Vi finner $\nabla f(x,y) = (2x-y, -x+6y^2)$, og $\nabla f(2,-1) = (5,4)$. Den gitte retningen er allerede en enhetsvektor, så den retningsderiverte det spørres etter er

$$(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}) \cdot \nabla f(2,-1) = (\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}) \cdot (5,4) = 4 - \tfrac{12}{5} = \tfrac{8}{5}.$$

b. Med $f(1,0) = 1$ og $\nabla f(1,0) = (2,-1)$ blir ligningen for tangentplanet

$$z = f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot (x-1, y-0) = 1 + 2(x-1) - y = 2x - y - 1,$$

eller $2x - y - z = 1$.

Oppgave 2

Implisitt derivasjon med hensyn på x gir $6x^2 + 3y^2y' = 5y + 5xy'$, der vi setter inn $x = 1$ og $y = 2$ og får $6 + 12y'(1) = 10 + 5y'(1)$, med løsning $y'(1) = \frac{4}{7}$.

Oppgave 3

Vi regner først ut

$$\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f) = (12x^2 + 6xy, 6y^2 + 3x^2).$$

Så søker vi kritiske punkter for f i det indre av sirkelskiven, altså punkter der $\nabla f = 0$:

$$12x^2 + 6xy = 0, \quad 6y^2 + 3x^2 = 0.$$

Den siste av disse to ligningene har kun løsningen $(x,y) = (0,0)$, og den passer også inn i den første ligningen. Så $(0,0)$ er eneste kritiske punkt for f. Vi har $f(0,0) = 0$.

Deretter leter vi etter ekstremverdier på sirkelranden, definert ved $g(x,y) = x^2 + y^2 - 17 = 0$. Så er $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, og metoden med Lagrange-multiplikator ($\nabla f = \lambda \nabla g$) gir

$$12x^2 + 6xy = 2\lambda x, \quad 6y^2 + 3x^2 = 2\lambda y. \tag{1}$$

Dersom vi multipliserer den første ligningen med y og den andre med x, blir de to høyresidene like, så de to venstresidene må også bli like: $12x^2y + 6xy^2 = 6xy^2 + 3x^3$, som vi forenkler til $4x^2y = x^3$ og videre til $(4y - x)x^2 = 0$. Dette holder hvis og bare hvis enten $x = 0$ eller $x = 4y$.

En *alternativ* måte å se dette på er slik: Den første ligningen i (1) holder dersom $x = 0$. I så fall kan vi sette $\lambda = 3y$, så holder den andre ligningen uansett hva y måtte være. Hvis $x \neq 0$ gir den første ligningen $\lambda = 6x + 3y$, som vi kan sette inn i den andre og få $6y^2 + 3x^2 = 2(6x + 3y)y$, som forenkles til $3x^2 = 12xy$, og dermed $x = 4y$.

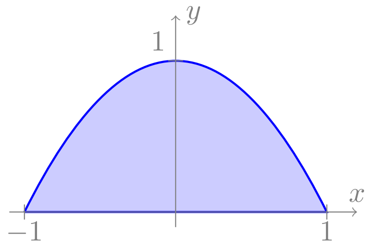
Vi fortsetter nå med å sette inn i føringen $x^2 + y^2 = 17$: Dersom $x = 0$ må da $y = \pm\sqrt{17}$, mens $x = 4y$ gir $17y^2 = 17$, altså $y = \pm 1$. De fire mulige ekstrempunktene på sirkelranden er dermed $(x,y) = (0, \sqrt{17})$, $(0, -\sqrt{17})$, $(4,1)$ og $(-4,-1)$.

Vi regner ut funksjonsverdiene $f(0, \pm\sqrt{17}) = \pm 2 \cdot 17^{3/2}$ og $f(\pm 4, \pm 1) = \pm(4 \cdot 4^3 + 2 + 3 \cdot 4^2) = \pm 306$. Merk at $2 \cdot 17^{3/2} < 2 \cdot 25^{3/2} = 2 \cdot 5^3 = 250 < 306$ (kan også sjekkes på kalkulator).

Vi vet at f er en kontinuerlig funksjon, og området $x^2 + y^2 \leqslant 17$ er lukket og begrenset, så det finnes en største og minste verdi for f på området. De fem punktene vi har undersøkt er de eneste mulige ekstrempunktene, så største og minste verdi for f på området er største og minste verdi blant de fem punktene, altså henholdsvis 306 og -306.

Oppgave 4

a. Integrasjonsområdet er avgrenset i x-retning av kurvene $x = \pm\sqrt{1-y}$, ekvivalent $y = 1 - x^2$; og i y-retning av $y = 0$. Figur til høyre.



b. Med integrasjonsrekkefølgen byttet om blir integralet

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \cos\big(\tfrac{\pi}{4}(3x - x^3)\big)\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos\big(\tfrac{\pi}{4}(3x-x^3)\big)\,dx \\ &= \int_{-2}^{2}\tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{\pi}{4}u)\,du \\ &= \frac{4}{3\pi}\Big[\sin(\tfrac{\pi}{4}u)\Big]_{u=-2}^{2} = \frac{8}{3\pi}, \end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 3x - x^3$, $du = 3(1-x^2)\,dx$.

Oppgave 5

Oppgaven løses lettest ved direkte regning: Det gitte planet har ligning $z = 2 - x - 2y$, og kombinasjonen av enhetsnormalvektoren og flateelementet kan skrives

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,dS = (-\partial_x z, -\partial_y z, 1)\,dx\,dy = (1,2,1)\,dx\,dy.$$

På planet er $z \geqslant 0$ ekvivalent med $x + 2y \leqslant 2$, og sammen med ulikhetene $x, y \geqslant 0$ beskriver dette trekanten med hjørner i $(x,y) = (0,0)$, $(2,0)$ og $(0,1)$. Flateintegralet vi søker blir dermed

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \int_0^1\int_0^{2-2y}\big((2x+2xy) + 2(y - xy - yz) + (2yz - 1)\big)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1\int_0^{2-2y}(2x + 2y - 1)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1\big((2-2y)^2 + (2y-1)(2-2y)\big)\,dy \\ &= \int_0^1 (2-2y)\,dy = 1. \end{aligned}$$

Alternativt kunne vi brukt divergensteoremet på tetraederet begrenset av det gitte planet og koordinatplanene. Da må vi integrere $\operatorname{div}\mathbf{F} = 4y - x - z + 3$ over tetraederet, som er litt arbeidskrevende, men i prinsipp enkelt. Og så må vi huske å trekke fra fluksintegralene over de tre andre sidene. Disse blir alle null unntatt for den siden som ligger i xy-planet, der $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = \big((2x+2xy)\mathbf{i} + 2(y-xy)\mathbf{j} - \mathbf{k}\big)\cdot(-\mathbf{k}) = 1$. Vi tar ikke med detaljene her.

Oppgave 6

a. Halvkulen kan beskrives i sylinderkoordinater ved $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-r^2}$ og $0 \leqslant r \leqslant 1$, som gir

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} 3z\,dz\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 \tfrac{3}{2}(1-r^2)\cdot r\,dr = 3\pi\Big[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\Big]_{r=0}^{1} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi bruke kulekoordinater:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3\underbrace{R\cos\phi}_{z}\cdot\underbrace{R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta}_{dV} \\ &= 6\pi\int_0^1 R^3\,dR\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,d\phi = 6\pi\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\phi\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

b. $\operatorname{div}\mathbf{F} = (z+z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z.$

Bunnen til T er sirkelskiven $\mathcal{D}$: $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z=0$. Utadrettet normalvektor på bunnen er $-\mathbf{k}$, så divergensteoremet gir

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS - \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \iiint_{T} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

På $\mathcal{D}$ er $\mathbf{F}\cdot k = xze^y + 1 = 1$, siden $z=0$ der, så

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \operatorname{areal}(\mathcal{D}) = \pi.$$

Videre er $\operatorname{div} F = z = \frac{1}{3}\rho$, så fra punkt **a** får vi

$$\iiint_{T} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \frac{\pi}{4}.$$

Dermed blir

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Oppgave 7

Vi bruker Stokes' teorem: La $\mathcal{S}$ være sirkelskiven $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z=0$. Da er $\mathcal{C}$ randen til $\mathcal{S}$, så Stokes' teorem gir

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

På $\mathcal{S}$ er $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$, så vi trenger bare å regne ut z-komponenten av $\operatorname{curl}\mathbf{F}$:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = \partial_x(x^3 - ye^z) - \partial_y(-y - y^3 + 2xz) = 1 + 3(x^2+y^2).$$

Dette innbyr til å regne ut integralet i polarkoordinater:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+3r^2)\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 (r+3r^3)\,dr = 2\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\Big) = \frac{5\pi}{2}.$$

Oppgave 8

Volumet blir

$$V = \iint_D \big((1-3x^2) - (x^2+4y^2)\big)\,dA = \iint_D \big(1 - 4(x^2+y^2)\big)\,dA,$$

der D er projeksjonen av det gitte legemet i xy-planet. D er bestemt ved $x^2+4y^2 \leqslant 1-3x^2$, det vil si $4(x^2+y^2) \leqslant 1$. Dette er sirkelskiven med sentrum i origo og radius $\frac{1}{2}$. Altså er

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} (1-4r^2)\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{1/2}(r-4r^3)\,dr = \pi\big((\tfrac{1}{2})^2 - 2(\tfrac{1}{2})^4\big) = \frac{\pi}{8}.$$