NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
9. juni 2012

Løsningsforslag

1 Ligningen for tangentplanet til $z = f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right)$ er gitt ved

$$z - 1 = f_x\left(\tfrac{\pi}{2}, 1\right)\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\tfrac{\pi}{2}, 1\right)(y-1).$$

Da

$$f_x(x,y) = y\cos(xy) - y\sin(xy), \quad \text{og} \quad f_y(x,y) = x\cos(xy) - x\sin(xy),$$

får vi at ligningen for tangentplanet er

$$x + \frac{\pi}{2}y + z = 1 + \pi.$$

2 La $g(x,y) = x^2 + 3y^2$. For å benytte Lagranges multiplikatormetode trenger vi ∇f og ∇g:

$$\nabla f = 2(1-x)\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j}, \qquad \nabla g = 2x\,\mathbf{i} + 6y\,\mathbf{j}.$$

De nødvendige betingelsene for største og minste verdi er:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g(x,y) = 1.$$

Fra $\nabla f = \lambda \nabla g$ får vi

$$1 - x = \lambda x \tag{1}$$
$$-y = 3\lambda y \tag{2}$$

Ligning (2) gir for $y \neq 0$ at $\lambda = -1/3$, som innsatt i (1) gir $x = 3/2$. Ettersom $g(3/2, y) = 9/4 + 3y^2 > 1$ for alle $y \in \mathbb{R}$ er ikke $(3/2, y)$ et punkt på ellipsen $x^2 + 3y^2 = 1$ for noen y. Da står vi igjen med at $y = 0$, som gir $g(x,0) = x^2 = 1$, det vil si $x = \pm 1$. Altså har vi

$$f(x,0) = \begin{cases} 5 & x = 1, \\ 1 & x = -1. \end{cases}$$

Største verdi til f på ellipsen er 5 og minste verdi er 1.

3 Kurven er beskrevet ved

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u\,\mathbf{i} + \int_0^t \sin(u^2)\,\mathrm{d}u\,\mathbf{j}, \quad t \geq 0.$$

Fundamentalsetningen i kalkulus gir

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \cos(t^2)\,\mathbf{i} + \sin(t^2)\,\mathbf{j}.$$

Buelengden er gitt ved

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{d}\tau = t.$$

Altså er $s = t$ og $\mathbf{T} = \mathbf{v}$. Dette gir

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = 2t\left(-\sin(t^2)\,\mathbf{i} + \cos(t^2)\,\mathbf{j}\right),$$

og at krumingen er gitt ved

$$\kappa(t) = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right| = 2t.$$

Fra uttrykkene for krumningen og buelengden ser vi at $\kappa(t) = 2s(t)$, altså at de er proporsjonale.

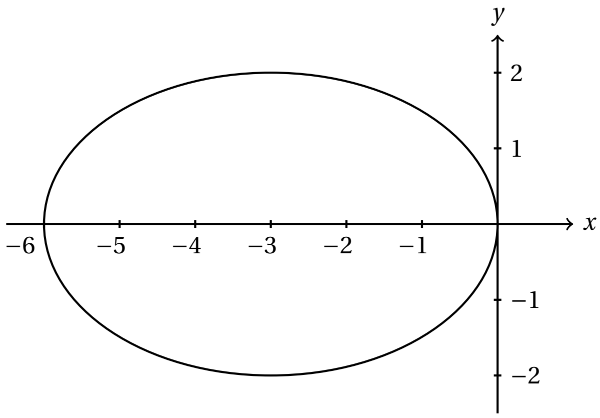
4 Ved å innføre sylinderkoordinater får vi at legemet T kan beskrives ved $0 \le z \le 1-r$, $0 \le r \le 1$ og $0 \le \theta \le \pi$. Altså er

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} zr\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2(1-r)^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{60}.$$

5 **a)** Ved å fullføre kvadratet finner vi standardformen til ligningen til ellipsen $4x^2+24x+9y^2=0$ til å være

$$\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Altså har ellipsen sentrum i $(-3,0)$, store halvakse har lengde 3 og lille halvakse har lengde 2.

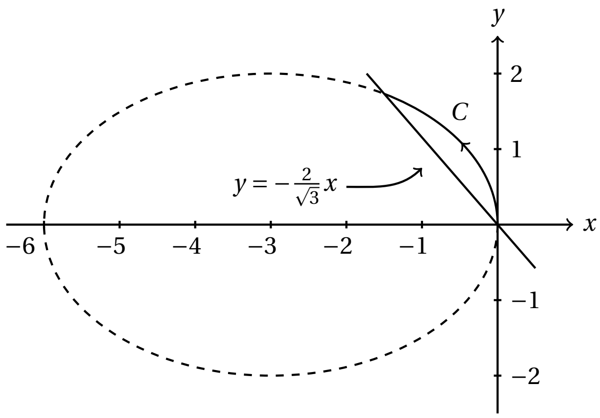


Figur 1: Ellipsen $4x^2+24x+9y^2=0$

b) For å finne skjæringspunktene mellom den rette linjen $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x$ og ellipsen i **a)** ser vi på

$$4x^2+24x+9\cdot\tfrac{4}{3}x^2 = 4x(4x+6) = 0,$$

som har løsning $x=0$ og $x=-3/2$. Altså er skjæringspunktene henholdsvis $(0,0)$ og $(-3/2,\sqrt{3})$.



Figur 2: Kurven C

En parametrisering av ellipsen i **a)** er gitt ved $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$. Punktene $(0,0)$ og $(-3/2,\sqrt{3})$ svarer til henholdsvis $t=0$ og $t=\pi/3$. Altså er

$$\begin{aligned}\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/3} (-2\sin t)(-3\sin t)\,\mathrm{d}t + (3\cos t - 3)\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/3} (6-6\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi - 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

c) La C' betegne kurven bestående av C og det rette linjestykket L langs $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x$ orientert fra $x = -3/2$ til $x = 0$. La R være området avgrenset av C og L. Greens teorem gir at

$$\oint_{C'} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 2\iint_R \mathrm{d}A.$$

Ettersom

$$\begin{aligned}\oint_{C'} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y &= \int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \int_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\\ &= 2\pi - 3\sqrt{3} + \int_{-3/2}^{0} \tfrac{2}{\sqrt{3}}x\mathrm{d}x + x\left(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\pi - 3\sqrt{3},\end{aligned}$$

får vi at

$$A = \iint_R \mathrm{d}A = \pi - \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

6 **a)** Fra oppgaveteksten får vi at en parametrisering av flaten S er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{1-(r-1)^2}\,\mathbf{k},$$

der $0 \le r \le 2$ og $0 \le \theta \le 2\pi$. Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r(r,\theta) &= \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} - \frac{r-1}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\,\mathbf{k},\\ \mathbf{r}_\theta(r,\theta) &= -r\sin\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Dette gir igjen at

$$(\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)(r,\theta) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{r-1}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = \frac{r^2-r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\cos\theta\,\mathbf{i} + \frac{r^2-r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k},$$

slik at

$$\mathrm{d}\sigma = |(\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)(r,\theta)|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Arealet til flaten S er

$$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \overset{(*)}{=} 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi^2,$$

der $(*)$ fremkommer ved å benytte subsitusjonen $r - 1 = \sin t$.

b) Volumet til legemet T er

$$\begin{aligned}V &= \iiint_T \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(r-1)^2}} \mathrm{d}z\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^2 r\sqrt{1-(r-1)^2}\,\mathrm{d}r\\ &\overset{(*)}{=} 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\pi\Bigg(\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}\pi} + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t}_{=0}\Bigg) = \pi^2,\end{aligned}$$

der $(*)$ fremkommer ved å benytte subsitusjonen $r - 1 = \sin t$.

c) Divergensteoremet gir at

$$\iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = 2\iiint_T \mathrm{d}V = 2\pi^2,$$

der ∂T er overflaten til T og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektoren som peker ut av T. La B betegne sirkelskiven i xy-planet med radius 2 (bunnen av T). Dermed har vi

$$\iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_B \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma - \underbrace{\iint_B \mathrm{d}\sigma}_{\text{areal av } B} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma - 4\pi.$$

Altså er

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi(\pi+2).$$