NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
6. august 2012

Løsningsforslag

1 **a)** Siden $\mathbf{F}$ er definert på et enkeltsammenhengende område, er det nok å vise at $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi har:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & zx^2 - 4yz^3 & yx^2 - 6y^2z^2 \end{vmatrix}$$
$$= (x^2 - 12yz^2 - x^2 + 12yz^2)\mathbf{i} + (2xy - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2xz)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

b) Siden feltet $\mathbf{F}$ er konservativt, kan vi utnytte at integralet $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ er uavhengig av veien og velge en enklere vei fra $\mathbf{r}(0) = \langle 1,0,1\rangle$ til $\mathbf{r}(1) = \langle 2,1,1\rangle$, f.eks. den rette linjen C' : $\mathbf{r}(t) = \langle 1,0,1\rangle + t\,(\langle 2,1,1\rangle - \langle 1,0,1\rangle) = \langle 1+t, t, 1\rangle$, $0 \le t \le 1$. Dette gir $\mathbf{r}'(t) = \langle 1,1,0\rangle$ og $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(1+t,t,1) = \langle 2t+2t^2, 1-2t+t^2, t-4t^2+t^3\rangle$, så $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\langle 1,1,0\rangle = 2t+2t^2+1-2t+t^2 = 3t^2+1$, og derfor $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2+1)dt = [t^3+t]_0^1 = 2$.
Alternativt kan vi bruke at $\mathbf{F}$ har en potensialfunksjon, dvs., en skalar funksjon f slik at $\nabla f = \mathbf{F}$. Vi har da at $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(2,1,1) - f(1,0,1)$. Vi bestemmer f: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz$ gir $f(x,y,z) = x^2yz + g(y,z)$. Videre: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + \frac{\partial g}{\partial y} = zx^2 - 4yz^3$ gir $\frac{\partial g}{\partial y} = -4yz^3$, som ved antiderivasjon mhp. y gir $g(y,z) = -2y^2z^3 + h(z)$, dvs., $f(x,y,z) = x^2yz - 2y^2z^3 + h(z)$. Til slutt: $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y - 6y^2z^2 + h'(z) = x^2y - 6y^2z^2$ gir $h'(z) = 0$, så $h(z)$ er en konstant; denne kan vi velge å sette lik 0. Så $f(x,y,z) = x^2yz - 2y^2z^3$ er en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$, og vi får:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(2,1,1) - f(1,0,1) = 2$$

2 La $g_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2$ og $g_2(x,y,z) = z - x + 4y$. For å finne største og minste verdi til f langs skjæringskurven mellom flatene $g_1(x,y,z) = 1$ og $g_2(x,y,z) = 0$ benytter vi Lagranges multiplikatormetode med to bibetingelser. De nødvendige betingelsene for største og minste verdi er:

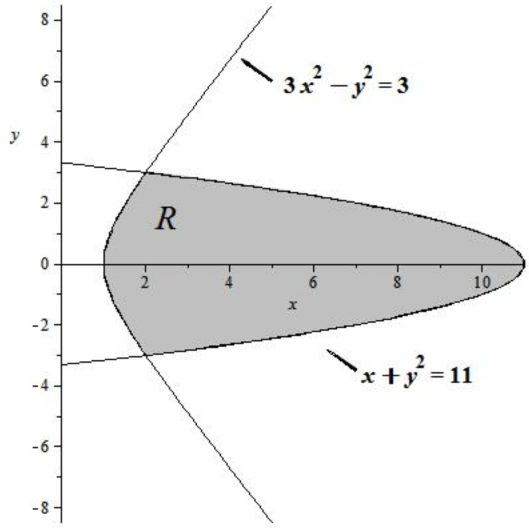
$$\nabla f = \lambda_1\nabla g_1 + \lambda_2\nabla g_2, \qquad g_1(x,y,z) = 1, \quad g_2(x,y,z) = 0.$$

Fra $\nabla f = \lambda_1\nabla g_1 + \lambda_2\nabla g_2$ får vi

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 0 &= 4\lambda_1 y + 4\lambda_2 \\ 1 &= \lambda_2 \end{aligned} \qquad \text{det vil si} \quad x = \frac{1}{2\lambda_1} \text{ og } y = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Innsetting av $x = 1/(2\lambda_1)$ og $y = -1/\lambda_1$ i $g_1(x,y,z) = 1$ gir $\lambda_1 = \pm 3/2$. Tilfellet $\lambda_1 = 3/2$ gir $x = 1/3$ og $y = -2/3$. Innsetting av disse verdiene for x og y i $g_2(x,y,z) = 0$ gir $z = 3$. Tilfellet $\lambda_1 = -3/2$ gir $x = -1/3$ og $y = 2/3$. Innsetting av disse verdiene for x og y i $g_2(x,y,z) = 0$ gir $z = -3$. Altså er den største verdien til $f(x,y,z) = z$ langs skjæringskurven mellom flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$ lik 3, og den minste verdien er lik -3.

3 Ligningen $3x^2 - y^2 = 3$, for $x \geq 1$, beskriver høyre gren til hyperbelen $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Ligningen $x + y^2 = 11$ beskriver parabelen $x - 11 = -y^2$. De to kurvene, samt området R (skyggelagt), er skissert i figuren til høyre. For å finne skjæringspunktene summerer vi de to ligningene og får $3x^2 + x = 14$. Denne annengradsligningen har løsningene $x = 2$ og $x = -7/3$. Vi er kun interessert i $x = 2$. Innsetting av $x = 2$ i $x + y^2 = 11$ gir $y = \pm 3$. Altså skjærer de to kurvene hverandre i $(2, 3)$ og $(2, -3)$.



For hver y mellom -3 og 3 varierer x mellom $\sqrt{1 + y^2/3}$ og $11 - y^2$. Dette gir:

$$\iint_R x\,dA = \int_{-3}^{3} \int_{\sqrt{1+y^2/3}}^{11-y^2} x\,dx\,dy = \int_{-3}^{3} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=\sqrt{1+y^2/3}}^{11-y^2} dy$$
$$= \int_0^3 \left((11 - y^2)^2 - 1 - \frac{y^2}{3}\right) dy = \int_0^3 \left(y^4 - \frac{67}{3}y^2 + 120\right) dy = \frac{1038}{5}.$$

4 Hvis vi lar δ betegne massetettheten, følger det av den gitte betingelsen at $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$, hvor k er en konstant. La T betegne legemet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$. Massen til T er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a k\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$
$$= \frac{2}{5}a^5 k\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{2}{5}a^5 k\pi.$$

La $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ være koordinatene til massesenteret til T. Ved symmetri er $\bar{x} = \bar{y} = 0$. For $\bar{z}$ har vi

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm = \frac{5}{2a^5 k\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho\cos\varphi \cdot k\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$
$$= \frac{5}{12}a \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = \frac{5}{12}a.$$

Altså ligger massesenteret til T i punktet $(0, 0, 5a/12)$.

5 **a)** Vi må vise at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$, dvs.,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)| = 0.$$

Dette gjøres best ved å innføre polarkoordinater (r, θ): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
For $(x, y) \neq (0, 0)$ har vi

$$f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2 \sin\theta\cos\theta}{r} = r\sin 2\theta.$$

Vi merker oss at $(x, y) \to 0 \iff r \to 0$.
Siden $0 \leq |f(x, y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r||\sin(2\theta)| \leq |r|$ og $\lim_{r\to 0} |r| = 0$, følger ved skviseloven at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)| = \lim_{r\to 0} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = 0\,.$$

b) Vi har

$$(D_{\mathbf{u}}f)|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\frac{2tu_1tu_2}{\sqrt{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}} - 0\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^2u_1u_2}{t|t|\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \overset{(*)}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^2u_1u_2}{t^2} = 2u_1u_2\,,$$

hvor likheten $(*)$ følger av at t går mot 0 gjennom positive verdier (dvs. $t = |t|$) og at $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ er en enhetsvektor. Vi har dermed vist at $(D_{\mathbf{u}}f)|_{(0,0)}$ eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ (i tillegg har vi vist at $(D_{\mathbf{u}}f)|_{(0,0)} = 2u_1u_2$).

$\boxed{6}$ **a)** Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. I sylinderkoordinater er T gitt ved $4r^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, og projeksjonen av T i xy-planet er sirkelskiven $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $z = 0$. For volumet V av T får vi da

$$V = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4r^2}^4 dz\,r dr\,d\theta \quad = 2\pi\int_0^1 (4-4r^2)rdr = 8\pi\int_0^1 (r - r^3)dr$$
$$= 8\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 2\pi\,.$$

b) La ∂T betegne hele overflaten til T. Fra divergensteoremet får vi at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV, \tag{1}$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av T. I vårt tilfelle er $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1/4$, slik at

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \frac{1}{4}\iiint_T dV = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

La S' betegne den delen av overflaten til T som ligger i planet $z = 4$, dvs. flaten gitt ved $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $z = 4$. Dette er en sirkelskive med radius 1 og derfor areal lik π. Total fluks ut gjennom ∂T er summen av fluksen ut gjennom sideflaten S og endeflaten S':

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S'} \frac{z}{4}\,d\sigma$$
$$= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S'} d\sigma = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \pi\,,$$

hvor vi har brukt at $z = 4$ på S'. Altså er $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma - \pi$. Ved å kombinere (1) og (2) får vi at $\iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \pi/2$. Altså er

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

c) Vi har at

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{yz}{8\pi} & -\dfrac{x}{2\pi} & \dfrac{z}{4} \end{vmatrix} = \frac{y}{8\pi}\,\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{2\pi} - \frac{z}{8\pi}\right)\mathbf{k}.$$

La C betegne sirkelen $r = 1, z = 4$ orientert *med* urviseren sett ovenfra. Hvis vi orienterer S' med enhetsnormal $= -\mathbf{k}$ og lar S ha orientering som ovenfor, vil både S og S' ha C som positivt orientert randkurve, og Stokes' teorem gir

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S'} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,d\sigma = \iint_{S'}\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{z}{8\pi}\right)d\sigma$$
$$= \iint_{S'}\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{8\pi}\right)d\sigma = \iint_{S'}\frac{1}{\pi}d\sigma = \frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{areal}(S') = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1\,,$$

hvor vi nok en gang har brukt at $z = 4$ på S'.
Alternativt, hvis vi lar C' betegne sirkelen C med motsatt orientering, dvs., orientert *mot* urviseren sett ovenfra, kan C' parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 4\rangle$, $0 \le t \le 2\pi$. Ved Stokes' teorem igjen:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, 4)\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \langle \frac{4\sin t}{8\pi}, -\frac{\cos t}{2\pi}, 1\rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle\,dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}(-\sin^2 t - \cos^2 t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1\,.\end{aligned}$$