NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
13. august 2011

Løsningsforslag

1 De kritiske punktene til $f(x,y)$ tilfredsstiller

$$f_x(x,y) = 6y + 12x^2 + 3y^2 = 0, \tag{1}$$
$$f_y(x,y) = 6x + 6xy = 0. \tag{2}$$

Fra (2) får vi $x(1+y) = 0$, altså er $x = 0$ eller $y = -1$.

Innsatt for $x = 0$ gir (1) at $y(y+2) = 0$, det vil si $y = 0$ eller $y = -2$. Innsatt for $y = -1$ gir (1) at $4x^2 - 1 = 0$, det vil si $x = \pm\frac{1}{2}$. Altså er $(0,0)$, $(0,-2)$, $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ og $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ kritiske punkter.

Diskriminanten er så gitt ved

$$\mathscr{D}(x,y) = \Delta(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 24x\cdot 6x - (6+6y)^2 = 144x^2 - 36(1+y)^2.$$

Ettersom

$$\mathscr{D}(0,0) = -36 < 0, \qquad \mathscr{D}\left(\tfrac{1}{2},-1\right) = 36 > 0,$$
$$\mathscr{D}(0,-2) = -36 < 0, \qquad \mathscr{D}\left(-\tfrac{1}{2},-1\right) = 36 > 0,$$

gir annenderiverttesten at $(0,0)$ og $(0,-2)$ er begge sadelpunkter. For å avgjøre hvorvidt $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ og $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ er lokale maksimums- eller minimumspunkter, ser vi på fortegnet til $f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},-1\right)$.

Ettersom

$$f_{xx}\left(\tfrac{1}{2},-1\right) = 12 > 0 \quad \text{og} \quad f_{xx}\left(-\tfrac{1}{2},-1\right) = -12 < 0,$$

får vi fra annenderiverttesten at $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ er et lokalt minimumspunkt og at $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ er et lokalt maksimumspunkt.

Altså har vi funnet følgende klassifikasjon av de kritiske punktene til funksjonen f:

$$(0,0):\ \text{sadelpunkt}, \qquad \left(\tfrac{1}{2},-1\right):\ \text{lokalt minimumspunkt},$$
$$(0,-2):\ \text{sadelpunkt}, \qquad \left(-\tfrac{1}{2},-1\right):\ \text{lokalt maksimumspunkt}.$$

2 Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right).$$

For å ta den retningsderiverte til f med hensyn på retningen $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, må vi normalisere $\mathbf{v}$. La så

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\mathbf{i} - \mathbf{k}).$$

Altså er den retningsderiverte til f i punktet $(1,2,-2)$ med hensyn på retningen $3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ gitt ved

$$D_{\mathbf{u}}f(1,2,-2) = \nabla f\big|_{(1,2,-2)} \cdot \mathbf{u} = \frac{2}{9}\left(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(3\mathbf{i} - \mathbf{k}) = \frac{\sqrt{10}}{9}.$$

3 **a)** Hastigheten til en partikkel er bestemt ved

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t > 0.$$

Farten er lengden til hastigheten, det vil si

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2 + t^2} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{t^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{t^2}} = \frac{1+t^2}{t}, \quad t > 0.$$

Akselerasjonen til en partikkel er bestemt ved

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad t > 0.$$

b) For å regne ut krumningen κ og torsjonen τ trenger vi å finne $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|$. Vi har at

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{a})(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{t} & \sqrt{2} & t \\ -\frac{1}{t^2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{2}{t}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{t^2}\mathbf{k}, \quad t>0,$$

slik at

$$|(\mathbf{v}\times\mathbf{a})(t)| = \sqrt{2+\frac{4}{t^2}+\frac{2}{t^4}} = \sqrt{\frac{2(t^4+2t^2+1)}{t^4}} = \frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{t^2}, \quad t>0.$$

Dermed er

$$\kappa(t) = \frac{|(\mathbf{v}\times\mathbf{a})(t)|}{(v(t))^3} = \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{t^2} = \frac{\sqrt{2}\,t}{(1+t^2)^2}, \quad t>0.$$

For å regne ut torsjonen τ ser vi på trippelproduktet $\big((\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}'\big)(t)$. Ettersom

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t^3}\mathbf{i}, \quad t>0,$$

får vi at

$$\tau(t) = \frac{\big((\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}'\big)(t)}{|(\mathbf{v}\times\mathbf{a})(t)|^2} = \frac{t^4}{2(1+t^2)^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{t^3} = \frac{\sqrt{2}\,t}{(1+t^2)^2}, \quad t>0.$$

$\boxed{4}$ Ettersom x og y er de to uavhengige variablene, gir kjerneregelen (se teorem 7, side 734 i boken) at

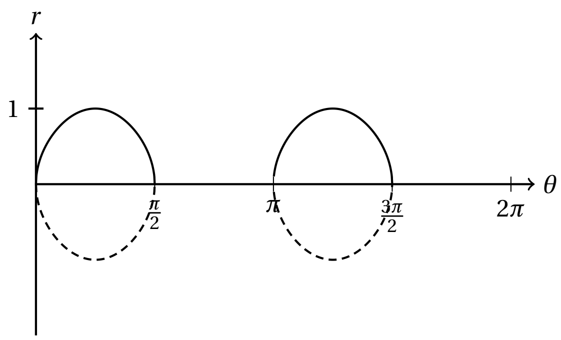
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Altså stemmer alternativ (iii).

$\boxed{5}$ Fra oppgaveteksten har vi at

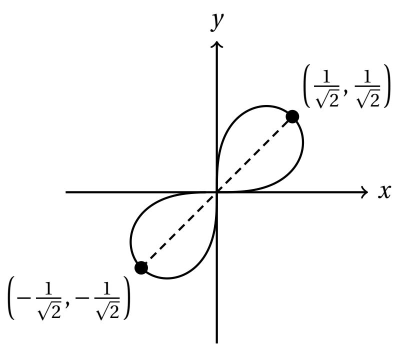
$$r(\theta) = \pm\sqrt{\sin 2\theta}.$$

For å skissére kurven C tegner vi først grafen til $r(\theta)$ i θr-planet.



Figur 1: Grafen til $r(\theta)$ i θr-planet

Her markerer de stiplede linjene grafen til $-\sqrt{\sin 2\theta}$. Fra figur 1 kan vi så tegne en skissé av kurven C.



Figur 2: Skissé av kurven C

Fra figur 2 ser vi at arealet innenfor C kan uttrykkes som

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta = 1.$$

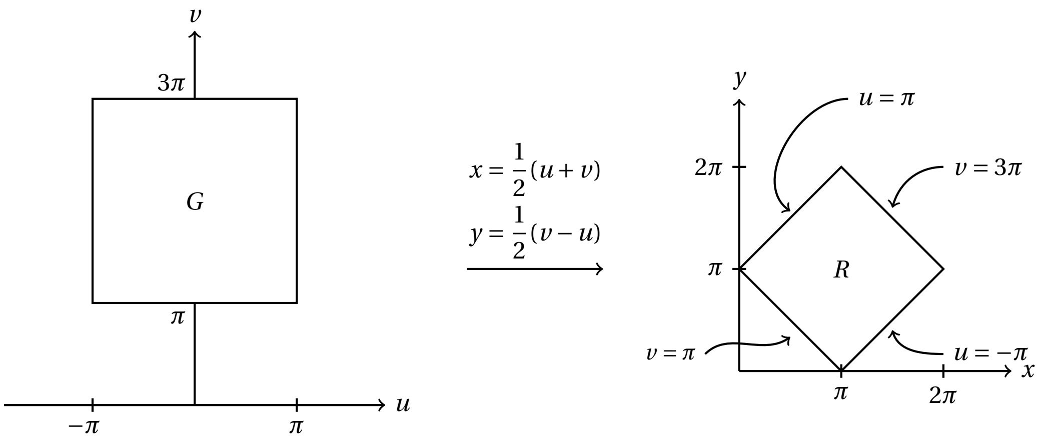
6 Vi innfører nye variabler

$$u = x - y,$$
$$v = x + y,$$

slik at

$$x = \frac{1}{2}(u+v),$$
$$y = \frac{1}{2}(v-u).$$

Figur 3 viser hvordan integrasjonsområdet i uv-planet blir sendt til (det opprinnelige) integrasjonsområdet i xy-planet.



Figur 3: Endring av integrasjonsområdet

Jacobi-determinanten til dette variabelskifte er så

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Dermed får vi

$$\iint_R (x-y)^2 \sin^2(x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_G u^2 \sin^2 v \, |J(u,v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \iint_G u^2 \sin^2 v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2} \int_\pi^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{\pi^3}{3} \int_\pi^{3\pi} \sin^2 v \, \mathrm{d}v = \frac{\pi^4}{3}.$$

7 La R betegne området innenfor kurven C (merk at R er et trapes hvor de parallelle sidene har lengde 2 og 3, høyden er 2, slik at arealet av trapeset er 5). Da gir Greens teorem at

$$\oint y^2 \, \mathrm{d}x + (2xy + x) \, \mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + x) - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) \mathrm{d}A = \iint_R \mathrm{d}A = 5.$$

8 **a)** Flaten S er disken med radius 1 med z-koordinat $1/e$, slik at $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Og da

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{y+z} - 2y & xe^{y+z} + y & e^{x+y} \end{vmatrix} = \left(e^{x+y} - xe^{y+z}\right)\mathbf{i} - \left(e^{x+y} - e^{y+z}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

får vi at

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_S \mathrm{d}\sigma = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

b) Flatene S og S' har samme randkurve C, der C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \frac{1}{e}\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stokes' teorem gir så

$$\iint_{S'} (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}'\,\mathrm{d}\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma \overset{\mathbf{a)}}{=} 2\pi.$$