Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
vår 2009

Løsningsforslag til eksamen
20.05.09

1 Gitt $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$.

a) Vi regner ut

$$f_x = \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2},$$
$$f_y = \frac{x \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2},$$

og løser $f_x = 0$, $f_y = 0$, dvs.

$$1 - x^2 + y^2 = 0, \tag{1}$$
$$xy = 0. \tag{2}$$

Den siste ligningen gir $x = 0$ eller $y = 0$. Men $x = 0$ er umulig, siden (1) blir $1 + y^2 = 0$. Vi må derfor ha $y = 0$, og da sier (1) at $x^2 = 1$. Altså:

De kritiske punktene er $(-1,0)$ og $(1,0)$.

b) R inneholder ingen av de kritiske punktene, så maksimumspunktet må ligge på randen. Randen består av fire rette linjestykker som vi sjekker hver for seg:

- Linjestykket $y = 0$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Da er funksjonsverdien $g(x) = f(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$, som har kritiske punkter i $x = \pm 1$ (der $g'(x) = 0$), men disse ligger ikke i intervallet $0 \le x \le 1/2$, så vi står igjen med endepunktene $x = 0$ og $x = 1/2$, der vi har verdiene $g(0) = 0$ og $g(1/2) = 2/5$. Så vi tar kun med oss verdien $2/5$ som mulig kandidat til maksimumsverdi.
- Linjestykket $y = 2$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Da er funksjonsverdien $h(x) = f(x,2) = \frac{x}{5+x^2}$, men denne er mindre enn $g(x)$ for $0 \le x \le 1/2$.
- Linjestykket $x = 0$, $0 \le y \le 2$. Da er funksjonsverdien $f(0,y) = 0$.
- Linjestykket $x = 1/2$, $0 \le y \le 2$. Da er funksjonsverdien $k(y) = f(1/2,y) = \frac{1/2}{5/4+y^2}$, som har maksimumsverdi $2/5$ i $y = 0$.

Altså:

Maksimumsverdien er $2/5$.

2 Fra komponenttesten (eller ved å regne ut curl $\mathbf{F}$ og se at den er null) ser vi at feltet er konservativt, dvs. det eksisterer en potensialfunksjon $f(x,y,z)$. For å finne denne, integrerer vi:

$$f_x = 2xy \implies f = x^2 y + g(y,z) \implies f_y = x^2 + g_y,$$

men vi skal ha $f_y = x^2 + ze^{yz}$, så

$$g_y = ze^{yz} \implies g = e^{yz} + h(z) \implies f = x^2y + e^{yz} + h(z) \implies f_z = ye^{yz} + h'(z),$$

men vi skal ha $f_z = ye^{yz}$, så $h'(z) = 0$, dvs. $h(z) = C$, der C er en vilkårlig konstant. Vi kan velge $C = 0$, og har da

$$f(x, y, z) = x^2y + e^{yz},$$

som oppfyller $\nabla f = \mathbf{F}$.

Arbeidet blir derfor

$$f(1, 3, 2) - f(0, 0, 0) = 3 + e^6 - 1 = \underline{\underline{2 + e^6}}$$

$\boxed{3}$ Sett $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, slik at kuleflaten er gitt ved $g(x, y, z) = 0$. Siden $f(x, y, z) = 3x + y + 2z$ er en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset område (en kuleflate), vet vi at f antar sin minimumsverdi i et punkt på kuleflaten. For å finne dette punktet bruker vi Lagrangemetoden, dvs. vi løser $\nabla f = \lambda \nabla g$ under tilleggsbetingelsen $g(x, y, z) = 0$. Siden $\nabla f = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ og $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, får vi ligningene

$$\begin{aligned} 3 &= 2\lambda x, \\ 1 &= 2\lambda y, \\ 2 &= 2\lambda z, \end{aligned}$$

som gir (merk at λ ikke kan være lik null)

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}, \frac{2}{2\lambda}\right).$$

Men betingelsen $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gir da

$$\frac{3^2 + 1^2 + 2^2}{2^2\lambda^2} = 25 \implies \lambda^2 = \frac{14}{100} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{14}}{10},$$

og derfor er

$$(x, y, z) = \pm\left(\frac{15}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{10}{\sqrt{14}}\right).$$

De tilsvarende verdiene av f er $f\left(\frac{15}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{10}{\sqrt{14}}\right) = \frac{70}{\sqrt{14}} = 5\sqrt{14}$ og $f\left(-\frac{15}{\sqrt{14}}, -\frac{5}{\sqrt{14}}, -\frac{10}{\sqrt{14}}\right) = -5\sqrt{14}$. Altså:

$$\underline{\underline{\text{Minimumsverdien er } -5\sqrt{14}.}}$$

$\boxed{4}$ Kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ er gitt i kulekoordinater ved $\rho = 1$. Den andre kuleflaten er gitt ved $\rho = 2\cos\phi$ (det ser vi fordi $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 2z \iff \rho^2 = 2\rho\cos\phi$). De to kuleflatene skjærer hverandre når $\cos\phi = 1/2$, dvs. $\phi = \pi/3$. D er derfor gitt i kulekoordinater ved

$$1 \le \rho \le 2\cos\phi, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Videre er $\delta = 1/\rho^2$, så masseintegralet blir (husk at $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ i kulekoordinater)

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_1^{2\cos\phi} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_1^{2\cos\phi} \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi/3} (2\cos\phi - 1) \sin\phi \, d\phi = 2\pi \left(\sin^2\phi + \cos\phi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

$\boxed{5}$ Siden S er den delen av $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger over $z = 1 - 2x$, må vi ha

$$1 - x^2 - y^2 \geq 1 - 2x \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \iff (x-1)^2 + y^2 \leq 1,$$

som beskriver projeksjonen R av S ned i xy-planet. R er altså en sirkelskive med radius 1 og sentrum i $(1, 0)$.

S er en graf $z = f(x, y)$ over R, der $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, og vi har derfor

$$\mathbf{n} \, d\sigma = \pm \left(-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \, dx \, dy$$

men vi må velge fortegnet + for å få positiv z-komponent. Derfor blir

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \mathbf{k} \cdot \left(-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \, dx \, dy = \, dx \, dy \quad \text{(på } S\text{)}$$

og

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_R dx \, dy = \text{arealet av } R = \underline{\underline{\pi}}.$$

$\boxed{6}$ **a)** $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & yz & xz \end{vmatrix} = \underline{\underline{-y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}}}.$

b) **Alternativ 1: Stokes' teorem.** Teoremet gir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

der S er trekanten PQR, og $\mathbf{n}$ må ha positiv z-komponent, siden omløpsretningen til C er PQR (dvs. mot klokken, sett ovenfra). Punktene P, Q og R ligger alle i planet $2x + y + z = 2$, så S er en del av dette planet. Projeksjonen av S ned i xy-planet er trekanten R med hjørner $(1, 0)$, $(0, 2)$ og $(0, 0)$, som kan beskrives ved

$$R\colon 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 2 - 2x.$$

Siden S er en graf $z = f(x, y)$ over R, der $f(x, y) = 2 - 2x - y$, har vi

$$\mathbf{n} \, d\sigma = \pm \left(-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \, dx \, dy = \pm (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy,$$

men vi må velge fortegnet + for å få positiv z-komponent. Dette gir

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= (-y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy \\ &= (-2y - z - 2y) \, dx \, dy = (-2 + 2x - 3y) \, dx \, dy \quad (z = 2 - 2x - y \text{ på } S), \end{aligned}$$

og derfor

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R (-2+2x-3y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2-2x}(-2+2x-3y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(-2y+2xy-\frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 (-10+20x-10x^2)\,dx = \underline{\underline{-\frac{10}{3}}}.$$

Alternativ 2: Direkte utregning. Vi regner ut

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C y^2\,dx + yz\,dy + xz\,dz$$

direkte. Integralet deles opp i en sum av tre bidrag, ett fra hvert av linjestykkene PQ, QR og RP.

Linjestykket PQ: Ligger i xy-planet og er gitt (med x som parameter) ved $0 \le x \le 1$, $y = 2-2x$, men med motsatt orientering, så vi setter inn et minustegn. Vi får derfor bidraget (siden $z = 0$)

$$\int_{PQ} y^2\,dx = -\int_0^1 (2-2x)^2\,dx = -\frac{4}{3}.$$

Linjestykket QR: Ligger i yz-planet og er gitt (med y som parameter) ved $0 \le y \le 2$, $z = 2-y$, men med motsatt orientering, så vi setter inn et minustegn. Vi får derfor bidraget (siden $x = 0$)

$$\int_{QR} yz\,dy = -\int_0^2 y(2-y)\,dy = -\frac{4}{3}.$$

Linjestykket RP: Ligger i xz-planet og er gitt (med z som parameter) ved $0 \le z \le 2$, $x = 1 - z/2$, men med motsatt orientering, så vi setter inn et minustegn. Vi får derfor bidraget (siden $y = 0$)

$$\int_{RP} xz\,dz = -\int_0^2 z\left(1-\frac{z}{2}\right)dz = -\frac{2}{3}.$$

Summen av bidragene er $-10/3$, som er svaret.

$\boxed{7}$ **a)** Med $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{j}$, gir utregning at

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}, \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{1+t},$$
$$\mathbf{T} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{i}+\sqrt{t}\,\mathbf{j}}{\sqrt{1+t}}}}, \qquad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{-\sqrt{t}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}}{2\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}, \qquad \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)},$$
$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{t}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{1+t}}}}, \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|}{|\mathbf{v}|} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}}}.$$

b) Vi må først finne ut hvor partikkelen er ved tiden $t = 7/3$ s. I løpet av $7/3$ s beveger partikkelen seg en avstand $s = vt = 2(7/3) = 14/3$ m fra origo, men denne avstanden måles langs $y = (2/3)x^{3/2}$, så vi må vite hvordan vi regner ut lengder langs denne kurven. Til det kan vi bruke parametriseringen fra punkt (a), men vi kaller parameteren τ istedenfor t, siden t nå betegner tiden. Da blir lengden fra origo ($\tau = 0$) til et punkt med parameterverdi $\tau = b$:

$$s(b) = \int_0^b |\mathbf{v}(\tau)| \, d\tau = \int_0^b \sqrt{1+\tau} \, d\tau = \frac{2}{3}(1+b)^{3/2} - \frac{2}{3}.$$

Ligningen $s(b) = 14/3$ gir $b = 3$, så partikkelen er i punktet $x = 3$, $y = (2/3)3^{3/2}$, og fra punkt (a) har vi der (parameterverdi $\tau = 3$)

$$\mathbf{N} = \frac{-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1+3}} = \frac{-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}}{2}, \qquad \kappa = \frac{1}{2\sqrt{3}(1+3)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot 2^3} = \frac{1}{16\sqrt{3}}.$$

Videre er farten konstant lik $v = 2$ m/s, så akselerasjonen er

$$\mathbf{a} = \kappa v^2 \mathbf{N} = \frac{1}{16\sqrt{3}} \cdot 2^2 \cdot \frac{-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}}{2} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}}{8\sqrt{3}}}}.$$