TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Bestem strømningslinjene (feltlinjene) til vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = \left(x^2, -y\right)$.

$\boxed{2}$ Regn ut linjeintegralet

$$\int_C (x + y)\, ds$$

der C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(2t, 3t, -t\right), \qquad 0 \le t \le 2.$$

$\boxed{3}$ Finn massen til vaieren som følger kurven C der C er skjæringskurven mellom flatene

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad \text{og} \qquad z = x^2 + y^2$$

dersom massetettheten er gitt ved $\delta(x, y, z) = \sqrt{12x + 12y - z^2 - 6}$.

$\boxed{4}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2\right)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(2e^t \cos(t), 2e^t \sin(t)\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

$\boxed{5}$ Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + z^2} + yz^2 e^{xyz^2}, xz^2 e^{xyz^2}, \frac{2z}{1 + x^2 + z^2} + 2xyze^{xyz^2}\right)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \sin(2\pi t), t\right), \qquad -1 \le t \le 1.$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Skisser vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, x) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

$\boxed{2}$ Avgjør om vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

er konservativt, og hvis ja, finn en tilhørende potensialfunksjon.

$\boxed{3}$ Samme som i 2, men med vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xy - z^2\right)\mathbf{i} + \left(2yz + x^2\right)\mathbf{j} - \left(2zx - y^2\right)\mathbf{k}.$$

$\boxed{4}$ Finn det 3-dimensjonale vektorfeltet med potensial

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

$\boxed{5}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn en potensialfunksjon til denne. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

$\boxed{6}$ Regn ut

$$\int_C y\, ds$$

der C er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t, t^2\right)$, der $0 \le t \le m$.

$\boxed{7}$ La C være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i første oktant. Regn ut

$$\int_C x\, ds.$$

$\boxed{8}$ Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\oint_C x\, dy$,

b) $\oint_C y\, dx$,

langs C gitt som randen av den øvre halvdisken $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$, orientert mot klokken.