Anbefalte oppgaver uke 9

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Finn massen til sylinderen gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1,$$

når massetettheten er gitt ved $\delta(x, y, z) = 2 + xy$.

$\boxed{2}$ Finn volumet av legemet gitt ved

$$(x + y)^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} \leq 1.$$

$\boxed{3}$ Finn volumet til ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ved å innføre nye variabler

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b} \quad \text{og} \quad w = \frac{z}{c}.$$

$\boxed{4}$ La T være området i rommet som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og mellom flatene $z = 0$ og $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$. Regn ut

$$\iiint_T 3e^z \sqrt{x^2 + y^2}\, dV.$$

$\boxed{5}$ Finn volumet av området i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ulikhetene:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad 0 \leq x \leq y.$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Finn volumet inne i kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og inne i sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\boxed{2}$ Finn $\iiint_R z\, dV$ over området R gitt ved $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$.

$\boxed{3}$ Finn massesenteret til $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$, der $a \geq 0$, med tettheten $\rho = x^2 + y^2 + z^2$.

$\boxed{4}$ (Sommeren 2008, oppgave 6a).) La T være området i rommet gitt ved

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Flaten gitt ved

$$3x^2 - y^2 = 0, \quad x \geq 0$$

deler området T i to deler, T_1 og T_2 der T_1 er den minste delen. Finn volumet V av T_1.

$\boxed{5}$ (Sommeren 2002, oppgave 3.) Bytt integrasjonsrekkefølgen i trippelintegralet

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{xy}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

til $dy\,dx\,dz$.

$\boxed{6}$ Bruk trippelintegraler til å utlede de kjente formlene for volumet av:

a) Sylinder med radius r og høyde h.

b) Kule med radius R.

c) Kjegle med høyde h og radius r.

Sammenlign med den tilsvarende oppgaven fra uke 8.