Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

1 For hvilke verdier av k konvergerer integralet nedenfor? Hvis det konvergerer, regn det også ut.

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}\,dA.$$

2 Regn ut det itererte integralet

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y \cos(y^3)\,dx\,dy\,dz.$$

3 Uttrykk det itererte integralet

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx$$

som et iterert integral der du først integrerer med hensyn på x, så med hensyn på y og til slutt med hensyn på z.

4 La P være parallellogrammet avgrenset av $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ og $y = x + 1$. Regn ut

$$\iint_P xy\,dx\,dy$$

ved å gjøre et passende variabelskifte.

5 Regn ut

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} e^{x+y}\,dA$$

ved å gjøre et passende variabelskifte.

Oppgaver med løsningsforslag

1 Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_Q y\,dA$$

der Q er kvartdisken gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq a^2$.

2 Definer gjennomsnittverdien til en integrerbar funksjon $f(x, y, z)$ over et område R i rommet. Finn så gjennomsnittverdien til $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over kuben $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ og $0 \leq z \leq 1$.

3 Bruk dobbeltintegraler for å utlede de kjente formlene for volumet av:

a) En sylinder med høyde h og radius r.

b) En kule med radius R.

c) En kjegle med høyde h og radius r.

$\boxed{4}$ Bruk polarkoordinater som variabelskifte og transformasjonsformelen for to variabler til å utlede arealformelen for et område innesluttet av en polarkurve $r = f(\theta)$ som du lærte i uke 2. Bruk tilsvarende idé med bruk av variabelskifte til å finne arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\boxed{5}$ (Sommeren 2010, oppgave 3.) Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}}\,dx \right) dy.$$

a) Skisser området D og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

b) Regn ut integralet I ved å benytte variabelskiftet $(u, v) \mapsto (u, u^2 v) = (x, y)$. Vis først at området D i xy-planet tilsvarer området R i uv-planet bestemt av ulikhetene $0 \le u \le 1$ og $0 \le v \le 1$. Det oppgis at

$$dx\,dy = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| du\,dv.$$

$\boxed{6}$ (Våren 2016, oppgave 7.) La D være området i første kvadrant (det vil si $x \le 0$ og $y \le 0$) som er avgrenset av ellipsene $4x^2 + y^2 = 16$ og $4x^2 + y^2 = 1$. Skisser området D og regn ut

$$\iint_D \frac{x}{4x^2 + y^2}\,dA.$$

$\boxed{7}$ (Våren 2015, oppgave 8.) Området D er avgrenset av kurvene gitt ved $y^2 - x^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 4$, $x = -y/2$ og $x = y/2$ for $y > 0$. Finn en variabelsubstitusjon som transformerer D til et rektangel, og bruk denne til å regne ut

$$\iint_D \frac{y^2 - x^2}{y^2}\,dA.$$

Vink: Regningen blir kanskje enklere om du uttrykker $du\,dv$ ved $dx\,dy$ enn om du gjør det omvendt.