Anbefalte oppgaver uke 5

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Bestem $\dfrac{dz}{dt}$ på to forskjellige måter når

$$\begin{aligned} z &= e^{xy} \\ x(t) &= 3t^2 \\ y(t) &= t^3. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ La $f(x, y, z)$ og $g(x, y)$ være to deriverbare funksjoner. Hvilket av uttrykkene nedenfor er et uttrykk for

$$\frac{\partial w}{\partial x}$$

når $w(x, y) = f(x, y, z)$, der $z = g(x, y)$ (uansett hvilke egenskaper funksjonene ellers måtte ha)?

$$(i)\ \frac{\partial f}{\partial x} \quad (ii)\ \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad (iii)\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad (iv)\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \quad (v)\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$\boxed{3}$ Bruk en passende linearisering for å finne en tilnærmet verdi for funksjonen

$$f(x, y) = \sin\big(\pi x y + \ln(y)\big)$$

i punktet $(0.01, 1.05)$.

$\boxed{4}$ Finn en ligning for tangentplanet til flaten $x^2 + 2z^2 = 9$ i punktet $P = (1, 3, 2)$. Hvilke andre punkter på flaten har det samme tangentplanet?

$\boxed{5}$ La $f(x, y, z) = xyz$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett både på $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ og $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$, og som har positiv z-komponent. Finn den retningsderiverte av f i punktet $P_0 = (1, -1, 2)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

$\boxed{6}$ La

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vis at den retningsderiverte

$$D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\mathbf{u}) - f(0, 0)}{h}$$

eksisterer for alle retninger $\mathbf{u} = (a, b)$. Er $f(x, y)$ deriverbar i $(0, 0)$?

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Anta at $f = f(\mathbf{x})$ er kontinuerlig deriverbar i $\mathbf{a}$. Vis at f er kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

$\boxed{2}$ Bruk kjerneregelen til å finne

$$\frac{\partial z}{\partial u}$$

hvis $z = g(x, y)$, der $y = f(x)$, $x = h(u, v)$.

$\boxed{3}$ Bruk en passende linearisering til å finne en approksimert verdi til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

i punktet $(3.1, 0.9)$.

$\boxed{4}$ Finn jacobimatrisen til transformasjonen $\mathbf{f}(r, \theta) = (x, y)$ der

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

$\boxed{5}$ I hvilken retning har funksjonen $f(x, y) = xy$ i punktet $(2, 0)$ endringsrate -1? Hva med -3? Hva med -2?

$\boxed{6}$ Vis at dersom $\nabla f(x, y) = 0$ på hele disken $x^2 + y^2 < r^2$, så er f er konstant på hele disken.

$\boxed{7}$ Gitt ligningen

$$xy^3 + x^4 y = 2,$$

finn

$$\frac{\partial x}{\partial y}.$$

$\boxed{8}$ Finn determinanten til jacobimatrisen til transformasjonavbildningen $\mathbf{f}(R, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ der

$$\begin{aligned} x &= R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= R\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Dette er transformasjonen for kulekoordinater som du kommer til å lære senere i emnet i forbindelse med multiple integraler.