TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 3

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Parametriser kurven gitt av skjæringen mellom flatene

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{og} \quad z = x + y.$$

$\boxed{2}$ Hvilken av følgende parametriseringer er *ikke* en gyldig parametrisering av skjæringskurven mellom kjeglen gitt ved $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og planet $y+z = 2$ i første oktant ($x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$)?

$$\begin{aligned}
&(i) && \mathbf{r}(t) = \big(2\sqrt{1-t}, t, 2-t\big), && 0 \leq t \leq 1 \\
&(ii) && \mathbf{r}(t) = \big(t, 1 - \tfrac{t^2}{4}, 1 + \tfrac{t^2}{4}\big), && 0 \leq t \leq 2 \\
&(iii) && \mathbf{r}(t) = \big(2\cos(t)\sin(t), \sin(t), 2 - \sin(t)\big), && 0 \leq t \leq \pi \\
&(iv) && \mathbf{r}(t) = \big(2\sqrt{t-1}, 2-t, t\big), && 1 \leq t \leq 2
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \big(2 + \sqrt{2}\cos(t), 1 - \sin(t), 3 + \sin(t)\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven, og bestem så krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

$\boxed{4}$ La C være kurven i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \big(\ln(t), \sqrt{2}t, \tfrac{1}{2}t^2\big), \qquad t > 0.$$

Finn et uttrykk for krumningen $\kappa(t)$ for en vilkårlig $t > 0$.

$\boxed{5}$ Vis at dersom prikkproduktet av hastigheten og akselerasjonen til en partikkel i bevegelse er positivt, så øker farten til partikkelen.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Finn hastigheten, farten og akselerasjonen ved tiden t til partikkelen med posisjon $\mathbf{r}(t)$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \big(t^2, -t^2, 1\big) = t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Beskriv også banen til partikkelen.

$\boxed{2}$ En partikkel beveger seg langs en kurve $\mathbf{r} = 3u\mathbf{i} + 3u^2\mathbf{j} + 2u^3\mathbf{k}$ i en retning tilsvarende økende u og med en konstant fart lik 6. Finn hastigheten og akselerasjonen til partikkelen i punktet $(3, 3, 2)$.

$\boxed{3}$ Finn lengden av kurven $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ fra $t = 0$ til $t = 1$.

$\boxed{4}$ Vis at hvis $\kappa(s) = 0$ for alle s, så er kurven $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, en rett linje.

$\boxed{5}$ Finn krumningen til kurven i planet $y = e^x$ i x.