Anbefalte oppgaver uke 15

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+y^2, y^2-z^2, z)$ gjennom kuleflaten med sentrum i origo og radius 3.

$\boxed{2}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ gjennom overflaten til sylinderen gitt ved

$$x^2 + (y-1)^2 \le 1, \quad 0 \le z \le 4.$$

$\boxed{3}$ La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ der $z \ge 3$, og la T være legemet begrenset av $\mathcal{S}$ og planet $z = 3$.

La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(g(x, y), xh(x, y), z\big)$, der g og h har kontinuerlige partiellderiverte som oppfyller betingelsen

$$\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

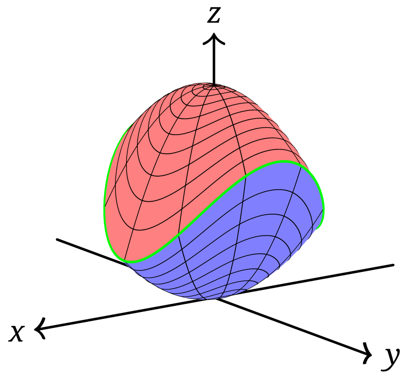
for alle x og y.

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren til $\mathcal{S}$ med positiv z-komponent.

$\boxed{4}$ De to flatene $z = x^2 + 3y^2$ og $z = 1 - (3x^2 + y^2)$ skjærer hverandre langs en kurve C. La $\mathcal{S}_1$ være den (begrensede) delen av flaten $z = x^2+3y^2$ som begrenses av C, og la $\mathcal{S}_2$ være den (begrensede) delen av flaten $z = 1 - (3x^2 + y^2)$ som begrenses av C.



La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(0, a, 3bx^2\big)$, der a og b er konstanter.

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \quad \text{og} \quad \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ i begge integralene er flatens oppoverrettede enhetsnormalvektor.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vis at fluksen til et konstant vektorfelt gjennom en lukket glatt og orientert flate i rommet alltid er 0.

$\boxed{2}$ Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

$\boxed{3}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antagelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at volumet til D er gitt ved

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Kan vi erstatte integranden med et annet vektorfelt og kontstanten $1/3$ med noe annet?

$\boxed{4}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antagelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. La φ og ψ være to glatte skalarfelt og la $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ betegne den retningsderiverte til φ i retningen av $\hat{\mathbf{N}}$. Vis at

$$\iiint_D \Delta\varphi\, dV = \oiint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

der $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi$ er laplaceoperatoren anvendt på φ.

$\boxed{5}$ Samme antagelser som i oppgave 4. Vis nå at (dette er en såkalt *Green type formel*):

$$\iiint_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV = \oiint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS.$$

$\boxed{6}$ Samme antagelser som i oppgave 5. Vis at

$$\iiint_D \nabla\varphi\, dV = \oiint_S \varphi\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

ved å anvende divergensteoremet på $\mathbf{F} = \varphi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er et vilkårlig konstant vektorfelt.

$\boxed{7}$ (Sommeren 2003, oppgave 6.) La T være legemet avgrenset av de to flatene

$$S_1: \quad z = x^2 + 3y^2 \qquad \text{og} \qquad S_2: \quad z = 9 - 3x^2 - y^2,$$

og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

a) Finn massen til T når massetettheten er $\delta(x, y, z) = x^2$.

b) La D_1 være den delen av overflaten til T som ligger på S_1, og la D_2 være den delen av overflaten til T som ligger på S_2. Beregn

$$\iint_{D_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

når det er kjent at

$$\iint_{D_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{2187\pi}{256}$$

og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadrettede enhetsnormalen til overflaten av T.

$\boxed{8}$ (Våren 1998, oppgave 5.)

a) La $\mathbf{F}$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte, definert i hele rommet. La S og S' være to orienterte, stykkevis glatte flater med felles positivt orientert randkurve C, der C er en orientert, enkel, lukket og stykkevis glatt kurve i rommet.

Gjør rede for at hvis $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ så er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

(Du kan anta at flatene S og S' bare skjærer hverandre langs randkurven C.)

b) I en elv spennes opp et nett som har form som en flate S med ligning

$$y = (1 - x^2)(1 - z^2) \qquad \text{for } -1 \le x \le 1, -1 \le z \le 1.$$

Vannstrømmen er gitt ved hastighetsfeltet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(\cos^2(x)\sin(z)\cos(z), \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\left(\frac{\pi}{2} + z\right), -\sin(x)\cos(x)\cos^2(z)\right).$$

Hvor mange volumenheter vann renner gjennom nettet per tidsenhet (det vil si, hvor stor er fluksen til vektorfeltet **v** gjennom S i retning av enhetsnormalen med positiv **j**-komponent)?

$\boxed{9}$ (Sommeren 2000, oppgave 6.)

La C være sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot urviseren. La videre

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Vis at

$$\oint_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 2\pi$$

ved å regne ut linjeintegralet direkte.

La R være området begrenset av sirkelen C. Forklar hva som er galt med følgende resonnement, og hvorfor:

«Ved Greens teorem har vi

$$\oint_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA = 0.»$$