Anbefalte oppgaver uke 14

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Kurven C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t)\right)$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Bestem følgende størrelser i et vilkårlig punkt på kurven C:

- enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}$
- krumningen κ.

b) Vis at C er skjæringskurven mellom en kuleflate og et plan. Hva slags type kurve er C?

$\boxed{2}$ Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y, z) = z$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$.

$\boxed{3}$ Finn den største verdien til

$$\oint_C y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy,$$

der C er en enkel, lukket kurve i xy-planet orientert mot klokken.

(Vink: $27 - 3(x^2 + y^2) \geq 0$ hvis og bare hvis $x^2 + y^2 \leq 9$.)

$\boxed{4}$ Finn arealet av flaten gitt ved

$$x^2 - y + z^2 = 0$$

for $0 \leq y \leq 4$.

$\boxed{5}$ **a)** Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{for} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

er curlfritt (det vil si, curl $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 0$) for alle $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) La C være kurven i xy-planet som starter i $(1, 0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ nøyaktig én gang, der C er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

og avgjør hvorvidt $\mathbf{F}$ er konservativt. Begrunn svaret.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ (Våren 1998, oppgave 1.) La $\mathcal{K}$ være kurven gitt ved

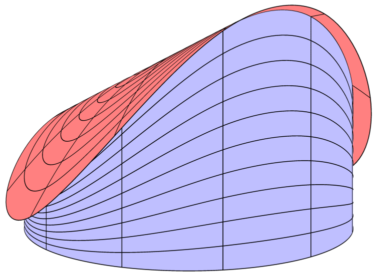
$$\mathbf{r}(t) = \left(e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), \sqrt{2}e^{-t}\right), \qquad 0 \leq t < \infty.$$

a) Vis at $\mathcal{K}$ ligger på en kjegleflate. Skisser $\mathcal{K}$ og bestem buelengden.

b) Bestem tangentlinjen til $\mathcal{K}$ i punktet med posisjonsvektor $\mathbf{r}(t_0)$. Skisser den kurven skjæringspunktet mellom tangentlinjen og xy-planet beskriver når t_0 varierer.

$\boxed{2}$ (Våren 2001, oppgave 5.) En planlagt kirke har form som en sirkulær sylinder $x^2 + y^2 = 18^2$ som står på xy-planet med tak

$$z = 20 - \frac{x^2}{25} + \frac{y}{2} \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 \le 20^2.$$



a) Beregn kirkerommets volum V.

b) Valg av takbelegg er avhengig av hvor bratt taket er. Kan det brukes et belegg som tåler en helning på maksimalt 60° med horisontalplanet?

$\boxed{3}$ (Sommeren 2005, oppgave 2.) Finn eventuelle maksima og minima for funksjonen

$$f(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}$$

a) når $x^2 + y^2 \le R^2$

b) og når $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.

Argumenter grundig for svarene.

$\boxed{4}$ (Våren 2017, oppgave 5.) La D være området i første kvadrant avgrenset av

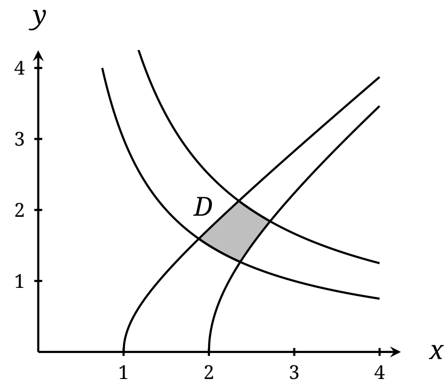
$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{og} \quad x^2 - y^2 = 4,$$

og

$$xy = 3 \quad \text{og} \quad xy = 5.$$

Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_D 2(x^4 - y^4)\, dA.$$



$\boxed{5}$ (Våren 2014, oppgave 2.) Finn buelengden av kurven med parameterfremstilling

$$x(t) = 3(t-1)^2, \quad y(t) = 2(2t-1)^{3/2} \quad \text{for} \quad 1 \le t \le 2.$$

$\boxed{6}$ (Våren 2005, oppgave 2.) La T betegne området som det integreres over i trippelintegralet

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Skissér projeksjonen av T i xy- og yz-planet, og skriv om I slik at integrasjonsrekkefølgen er på formen

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

der du må finne de riktige integrasjonsgrensene.