TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2024

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xy, x^2+1, z^2\big), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke er konservativt.

Finn et vektorfelt **G** slik at vektorfeltet

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + \mathbf{G}(x,y,z)$$

er konservativt, der **H** ikke er et konstant vektorfelt.

$\boxed{2}$ Finn et vektorpotensial for

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(3xy^2z, 4xz - y^3z, 1\big).$$

$\boxed{3}$ Bestem

$$\oint_C \big(x \sin(y^2) - y^2, x^2 y \cos(y^2) + 3x\big) \cdot d\mathbf{r},$$

der C er randen til trapeset med hjørner $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ og $(0,2)$, orientert mot klokken.

$\boxed{4}$ Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathbf{F}(x,y) = \big(3x+2y, x+2\sin(y^3)\big)$ og C er den delen av sirkelen $x^2+y^2=4$ der $y \geq 0$ og hvor C er orientert mot klokken.

$\boxed{5}$ La $f(x,y)$ ha kontinuerlige partielle deriverte av første og andre orden i et område R i xy-planet som er begrenset av en stykkevis glatt, enkel lukket kurve C.

Vis at dersom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

i R, så er

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\, dx = \oint_C \frac{\partial f}{\partial x}\, dy.$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Anta uendelig glatthet for alle involverte funksjoner f og vektorfelt **F**. Vis at vi da alltid har:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) &= 0. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Finn divergensen og curl til $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

$\boxed{3}$ Finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta) = r\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$, der (r,θ) er polarkoordinater.

$\boxed{4}$ La $\mathbf{F}$ være et glatt to-dimensjonelt vektorfelt. Hvis C_ε er sirkelen med radius ε sentrert i origo og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadpekende enhetsnormalen til C_ε, vis at

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, ds = \operatorname{div}(\mathbf{F})(0,0).$$

$\boxed{5}$ La $\mathbf{r} = (x, y, z)$ og la $r = |\mathbf{r}|$. Anta at f er en deriverbar funksjon av én variabel. Vis at

$$\nabla\cdot(f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r).$$

Finn $f(r)$ hvis $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt.

$\boxed{6}$ (Sommeren 2016, oppgave 7.) La C være randen til firkanten med hjørner i $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, 0)$ og $(1, 7)$, der C er orientert mot urviseren.

Regn ut

$$\int_C xy\, dx + 2x\, dy.$$

$\boxed{7}$ (Våren 2012, oppgave 5.)

a) Ligningen $4x^2+24x+9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til den store og lille halvaksen, og skisser ellipsen.

b) Den rette linjen $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$ deler ellipsen i to deler. La C være den korteste av disse delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_C -y\, dx + x\, dy.$$

(Vink: Parametriseringen $x = 3\cos(t) - 3$, $y = 2\sin(t)$ kan brukes.)

c) Regn ut arealet avgrenset av C og linja $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$.

(Hint: Greens teorem kan brukes.)