NTNU | Norwegian University of Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 9
Vektorfelt og linjeintegraler

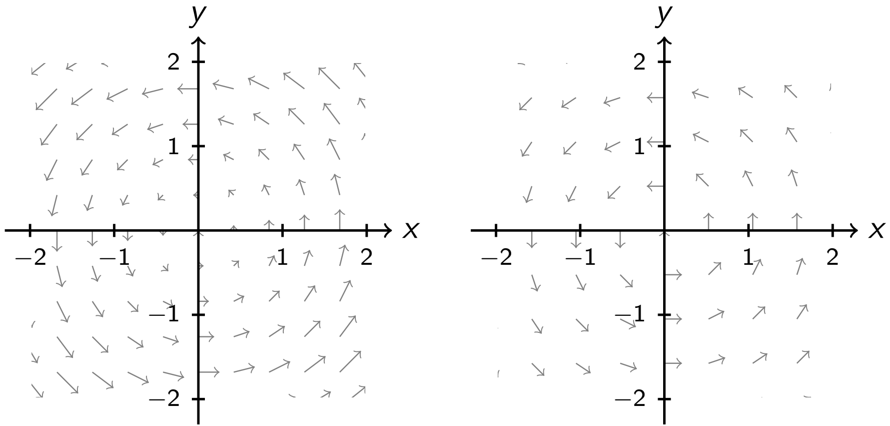
Vår 2024

Nøkkelbegreper

- Vektorfelt
- Konservative vektorfelt
- Linjeintegraler for funksjoner (skalarfelt)
- Linjeintegraler for vektorfelt

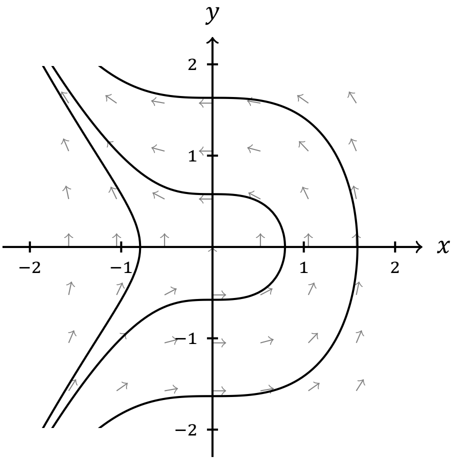
Spørsmål?

Vektorfelt



$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

Strømningslinjer



$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)$$

Eksempel

Finn en potensialfunksjon for det konservative vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xye^{x^2}, e^{x^2}, z\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Konservative vektorfelt

Et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ er konservativt hvis det finnes en potensialfunksjon $\varphi(x, y, z)$ slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

for alle punkter $(x, y, z) \in D$.

Hvis vektorfeltet **F** er konservativt må det oppfylle

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in D$.

Masse og massesenter

Massen av en streng langs kurven $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ med **massetetthetsfunksjon** $\delta = \delta(x, y, z)$ er gitt ved

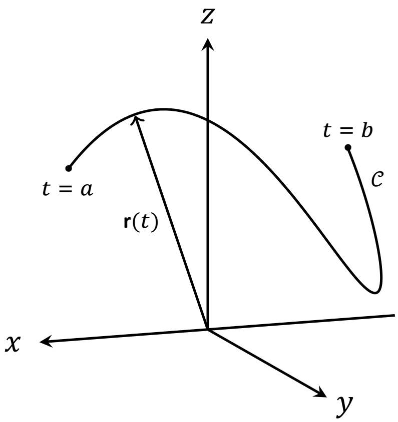
$$m = \int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \delta(x, y, z)\, ds.$$

Massesenteret til strengen er punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ i $\mathbb{R}^3$, der

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\, dm, \qquad \overline{y} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\, dm, \qquad \overline{z} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} z\, dm.$$

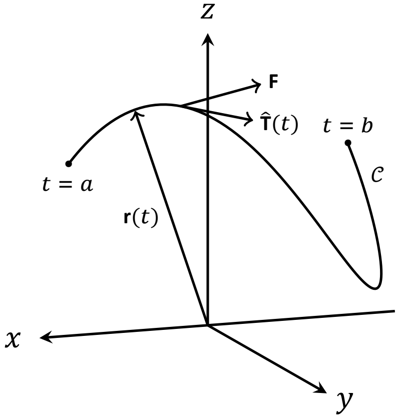
Dersom $\delta(x, y, z) = 1$, så kalles punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ **sentroiden** til strengen.

Linjeintegral for funksjoner (skalarfelt)



$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Linjeintegral for vektorfelt



$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Linjeintegral i konservativt vektorfelt

La D være en åpen, sammenhengende delmengde av $\mathbb{R}^n$, og la **F** være et glatt vektorfelt i D. Da er følgende utsagn ekvivalente:

1. **F** er konservativt i D.
2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle stykkevis glatte, lukkede kurver $\mathcal{C}$ i D.
3. Linjeintegralet $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ er uavhengig av veien mellom start- og sluttpunktet.

Eksempel

Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xye^{x^2}, e^{x^2}, z\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

og der kurven $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$\mathrm{r}(t) = (t, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Figurer

- earth.nullschool.net